QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONTINUA DANS LES ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS, UNE APPLICATION SUR L'INDICE DE POINT FIXE

par

Razafy Razafindrakoto

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès science (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, décembre 1996

0-612-21822-8

À la mémoire de mon père.

À ma mère

Avec respects.

SOMMAIRE

Nous proposons dans ce mémoire une étude des continua dans les espaces métriques compacts. Nous avons ainsi établi deux propriétés des continua, mais aussi caractérisé une position relative de deux continua dans le sous-ensemble compact $[0,1]\times[0,1]$. Enfin, nous avons abordé l'étude des continua localement connexes, le théorème de Hahn-Mazurkiewicz.

Nous appliquons ensuite ces résultats à l'indice de point fixe. En 1995, J.-M. BELLEY et G. FOURNIER, dans leur rapport **[1]**, ont présenté une étude de problèmes variationnels par la méthode de continuation; ce travail sera à la base du deuxième chapitre de ce mémoire.

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis ici de rendre hommage à la mémoire de l'un des plus éminents chercheurs du Département de Mathématiques et Informatique, le regretté Professeur Gilles FOURNIER. J'ai eu le privilège d'être l'un de ses étudiants gradués; sous sa direction ce travail avait été amorcé. Je remercie MME Reine GAGNON, vice -doyenne à la recherche qui m'a encouragé à terminer ce travail.

Je voudrais également remercier le professeur M. Jacques DUBOIS, qui m'a dirigé dans ce travail. Il m'a éclairé et enrichi par ce mémoire. J'apprécierai toujours sa compétence, sa disponibilité et ses grandes qualités humaines.

Mes remerciements vont droit aussi au professeur M. Jean-Pierre SAMSON qui a soigneusement lu et corrigé ce texte.

Merci également à toute l'équipe de L'ÉCOLE LE SENTIER qui m'a toujours encouragé.

Je tiens à remercier aussi Irène Marie Laurence, mon épouse qui n'a pas cessé de me soutenir et m'encourager pour venir à bout de ce travail. Un grand merci à mes enfants, Anjarasoa, Joro et Valisoa pour leur encouragement; n'oubliez pas mes chers enfants, le proverbe malagasy qui dit:

« Insensé est celui qui ne fait pas mieux que son père »

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les intervalles fermés et bornés de IR possèdent des propriétés topologiques remarquables, connues depuis fort longtemps. Toutes ces propriétés découlent du fait que de tels intervalles vérifient la condition dite de HEINE-BOREL-LEBESGUE, ainsi ces intervalles fermés et bornés sont dits compacts. Par exemple, si dans un espace métrique (X,d), les boules fermées ne sont pas compactes et si A est un sous-ensemble fermé de X, m $\in$(X \ A), il n'existe pas nécessairement ou il existe plusieurs α dans A tel que d(m , α) = d(m , A) = inf{d(m , a) / a $\in$ A}, c'est-à-dire que l'on ne peut pas parler de « projection » dans cet espace! Pour remédier à cela, les analystes ont découvert que si la distance induite par la norme sur un espace normé complet satisfait à l'identité du parallélogramme et si la partie fermée A est convexe, la notion de « projection » ou de « la plus courte distance » existe dans ce cas, sans que la boule unité y soit compacte! L'absence de la compacité de la boule unité d'un espace a donc participé à la naissance de l'analyse hilbertienne. F. Riesz avait établi que si un espace normé est de dimension infinie alors sa boule unité n'est pas compacte. En particulier, dans C(X), l'espace des fonctions continues d'un espace compact X dans le corps des complexes C muni de la topologie de la convergence uniforme, les sous-ensembles fermés et bornés ne sont pas compacts; là encore nous avons le théorème d'Ascoli, un précieux critère qui permet de caractériser les parties relativement compactes de C(X). Mais nous savons aussi comment Alaoglu-Bourbaki a introduit dans un espace de Banach de dimension infinie, une autre topologie dite affaiblie, plus faible que la topologie de la norme, mais pour laquelle la boule unité devient compacte. Bref, nous n'en finirons pas sur le rôle qu'occupe la notion de compact en mathématiques, et l'élan qu'elle a donné pour l'avancement des différents concepts en analyse.

Un intervalle de IR est formé d'une seule partie, d'un seul tenant. En regardant une figure géométrique, chacun sait dire si elle est formée d'un ou de plusieurs morceaux disjoints; la connexité est la notion mathématique qui correspond à une telle réalité physique. Elle est elle aussi à la base de plusieurs résultats en analyse, en particulier le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème du principe des zéros isolés des fonctions analytiques et j'en passe encore! Comme les sous-ensembles compacts, les parties connexes sont des invariants. Les intervalles fermés et bornés de IR réunissent donc les deux propriétés. Dans ce mémoire, nous allons étudier les CONTINUA, les sous-ensembles compacts et connexes, en particulier dans un espace compact.

Rappelons que Fréchet « Sur quelques points de calcul fonctionnel » [1906] fut le premier à employer le terme « compact »; il l'avait appliqué dans un espace métrique pour définir une suite de points qui contient une sous-suite convergente. Hausdorff [1914] a été le premier à notifier que la définition actuelle, en terme de la condition de Heine-Borel-Lebesgue, est équivalente à la définition de Fréchet dans un espace métrique. Enfin, il revient à Alexandroff et Urysohn [1924] d'avoir été les premiers à appliquer ces définitions dans les espaces topologiques plus généraux. La deuxième notion, la connexité dans sa version moderne, avait été proposée pour la première fois par C. Jordan [1893]; mais indépendamment Schoenfliesz [1904] a énoncé le même résultat. Mais avant C. Jordan, c'est G. Cantor [1879] qui fut le premier à définir la connexité d'un sous-ensemble par la technique des points bien enchaînés. Une étude systématique des espaces connexes fut initiée par F. Hausdroff en [1914] et par B. Knaster et K. Kuratowski en [1921]. Ainsi Cantor a introduit la notion de continua mais la version moderne de ce concept est due à C. Jordan. Depuis, l'étude des continua a connu de grands progrès par le concours de plusieurs éminents mathématiciens comme MAZURKIEWICZ, K. KURATOWSKI **[10]**, W. SIERPINSKI **[15]** et T. WHYBURN **[16]** ...; nous avons simplement cité ceux dont les travaux nous ont aidé dans la rédaction de ce mémoire. Tout récemment S.B. NADLER **[13]** a publié son livre intitulé « A continuum theory »; et comme celui de K.KURATOWSKI (Topologie II) ce livre de S.B. NADLER nous a beaucoup inspiré pour la rédaction du chapitre 1.

Ce mémoire donc, est divisé en deux chapitres; le premier est consacré à l'étude systématique des continua dans les espaces métriques compacts et le deuxième à une application de ces résultats à la théorie de l'indice de point fixe.

Voici donc les différentes étapes qui composent ces deux chapitres. Rappelons encore que dans IR nous avons la propriété dite des segments emboîtés, c'est-à-dire que toute suite décroissante d'intervalles fermés (segments) de IR possède une intersection non vide. Nous obtiendrons un résultat similaire pour les continua dans un espace métrique compact; le théorème 1.1.2 qui est connu sous le nom de « méthode du nid ». Ce théorème est un des piliers de la théorie du continuum; il permet en particulier de construire des exemples de continua. L'étude des continua utilisera la notion d' « être bien enchaîné », notion qui est à la base de la définition de la connexité selon G. Cantor dans un espace compact. Nous aborderons dans cette première section aussi une technique permettant de séparer deux points d'un espace compact, voir proposition 1.1.4. Nous généralisons ce résultat dans le chapitre 2 par la proposition 2.1.2. Comme la démonstration du théorème 1.1.2, notre deuxième contribution sur l' étude des continua est <u>**le théorème 1.1.5**</u>, une autre propriété des continua dans les espaces compacts. Ce résultat est à la base du deuxième chapitre. Enfin nous clôturons cette première section par un résultat sur **<u>une position relative de deux continua</u>** dans le compact $[0,1]^2$. Nous ferons appel au théorème de séparation de Jordan pour démontrer ce résultat.

La deuxième section du premier chapitre sera consacrée à une étude détaillée des continua par le concept de connexité locale. La connexité locale n'est pas un invariant. Nous établirons que tous les continua localement connexes, c'est-à-dire les espaces de Peano, sont des courbes, un théorème du à **<u>Hahn-Mazurkiewicz</u>**. Le théorème est très puissant et sa preuve est très ardue. Il existe une abondante littérature sur ce théorème. Nous nous sommes inspirés de la méthode de Sierpinski pour atteindre cet objectif. En théorie de l'homologie simpliciale pour discrétiser l'espace topologique, on utilise la méthode de triangulation. La technique de Sierpinski est similaire à cela; elle consiste à décomposer le sous-ensemble en une réunion finie de sous-ensembles connexes de diamètre très réduit. Lorsqu'on aura donc fini de décomposer ce continuum localement connexe par cette méthode dite de Sierpinski alors un détour vers les fonctions multivoques achèvera la construction de la fonction qui sert de paramétrage de ce continuum localement connexe.

Enfin la troisième section de ce chapitre permettra de visualiser la méthode du nid et le théorème de Hahn-Mazurkiewicz. Les exemples abordés sont un continuum indécomposable, un paramétrage du carré $[0,1]^2$ et enfin le tapis de Sierpinski.

Le chapitre 2 est composé de trois sections. La première section débutera par deux critères (propositions 2.1.1 et 2) qui permettront de séparer un point d'un ensemble et aussi un sous-ensemble d'un autre; la technique utilisée ici encore est la méthode d'« être bien enchaîné »; nous ferons appel à ce résultat pour démontrer le théorème du continuum. Enfin, dans cette même section nous établissons le deuxième résultat principal de ce mémoire, **le théorème du continuum**, ce théorème nous fournit un critère qui permet de mettre en évidence les continua d'un compact de $[0,1]^2$. Nous avons d'abord donné une démonstration au problème posé par G. CHOQUET **[4]**; dans ce résultat nous pouvons reconnaître si un fermé de $[0,1]^2$ est un continuum ou non, mais il offre aussi une généralisation du théorème de point fixe de Brouwer sur $[0,1]$. Cette illustration élémentaire nous permettra d'aborder et de mieux cerner le théorème du continuum.

La deuxième section sera consacrée à un rappel sur l'indice de point fixe de Lefschetz. Rappelons que L.E.J. Brouwer, par la méthode d'approximation simpliciale, a démontré que toute application continue d'une boule sur elle-même a nécessairement un point fixe. Ainsi les théorèmes d'existence de points fixes ont trouvé de nombreuses applications, notamment en analyse classique, et en analyse fonctionnelle, car l'existence d'un point fixe implique par exemple l'existence d'une solution de certaines équations (voir introduction ch. 2). Ces travaux ont été étendus entre autres par BIRKOFF, par SCHAUDER et par LERAY **[12]**. Ces théorèmes d'existence de points fixes peuvent être précisés davantage par la notion de l'indice, introduite par Poincaré en 1885. Lefschetz donna en 1923 une formule rattachant le nombre algébrique des points fixes , c'est-à-dire la somme algébrique des indices, à des propriétés des homomorphismes qu'une application continue induit sur les groupes d'homologie; le résultat de Lefschetz était valable seulement pour les variétés et ce fut Hopf qui l'a étendu au cas des polyèdres. La formule de Lefschetz-Hopf a donc permis de généraliser des résultats dus en particulier à Brouwer dans le cas de la sphère à deux dimensions. Voici brièvement cette technique de Lefschetz. Elle utilise donc la plus ancienne des méthodes de la topologie algébrique: associer à tout espace topologique un ensemble muni d'une structure algébrique.

On commence d'abord par trianguler l'espace, du polyèdre ainsi obtenu est associé, par la méthode simpliciale, le groupe d'homologie (espace vectoriel); d'autre part l'application continue sera approximée par une application simpliciale qui à son tour induit une application linéaire dans l'espace vectoriel d'homologie. Alors la trace de cette application linéaire induite est l'indice de Lefschetz de l'application continue initiale.

Notre contribution consiste donc à étudier l'ensemble des points fixes d'une application continue. Nous établissons le théorème du continuum(proposition 2.3.3) en remplaçant $I \times I$ de la proposition 2.1.4 par $X \times I$ où X est un espace euclidien de dimension finie. À la liste des propriétés de l'indice (point fixe, homotopie, addition, excision et normalisation) s'ajoute donc cette propriété du continuum. Nous clôturons enfin ce chapitre en extensionnant la propriété du continuum au cas où X est de dimension infinie (proposition 2.3.5). Ces résultats sur la propriété du continuum de l'indice du point fixe sont originaux, ils ont été obtenus conjointement avec le professeur **Gilles FOURNIER [1]**. Pour ce faire, voici comment nous avions abordé le problème. L'espace X étant de dimension infinie, nous commençons donc par le décomposer en une réunion dénombrable de sous-espaces de dimension finie dont la réunion est dense dans X et d'autre part l'application continue sera approximée par une suite des fonctions continues dont chaque terme est restreint au sous-espace de dimension finie, ce qui ramène la situation au cas de dimension finie. Ici donc intervient favorablement le **<u>théorème 1.1.5</u>** pour démontrer la propriété du continuum en dimension infinie.

Chapitre 1

LES CONTINUA DANS LES ESPACES MÉTRIQUES

Ce chapitre est essentiellement consacré à l'introduction du concept de Continuum qui est dû en partie à C. JORDAN **[8]** . Quelques propriétés de base seront développées pour la suite. Nous terminerons ce chapitre en donnant quelques exemples de continua. Signalons que nous préférerons le terme continuum dont le pluriel est continua au lieu de continu .

Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire, X désignera un espace métrique dont la distance est d. Voici quelques notations habituelles:

$B_{\varepsilon}(x_0)$: la boule de centre $x_0 \in X$, de rayon $\varepsilon > 0$

$B_{\varepsilon}(A) = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon}(x)$, $A \subseteq X$

$\partial(A)$: la frontière de A, $A \subseteq X$

diam (A) : le diamètre de A, $A \subseteq X$

$d(p,A) = \min\{d(p,x) / x \in A\}$, $p \in X$, $A \subseteq X$

I^2 désigne le carré $[0,1]x[0,1]$

${}_tI = \{t\} \times I$ et $I_t = I \times \{t\}$, $t \in [0,1]$.

1.1 LES CONTINUA

La connexité et la compacité d'un espace topologique sont deux propriétés très importantes, mais dissemblables; réunies, ces deux propriétés nous procurent la notion de continua. Nous allons aborder ce paragraphe par l'une des plus importantes techniques qui nous permettent de construire des continua intéressants; c'est le théorème 1.1.2 , dit méthode du nid. Nous illustrerons cette technique par quelques exemples dans le paragraphe 1.3.

La méthode du nid est centrale en théorie du continuum. Non seulement, elle nous permet de construire des exemples, mais elle est aussi la clé pour prouver plusieurs théorèmes. Cette méthode du nid est utilisée pour construire des fonctions continues et dans notre étude, nous la retrouvons par exemple dans la démonstration du théorème 1.2.7.

Nous établissons aussi dans ce paragraphe la proposition 1.1.4; ce résultat permet de reconnaître si les composantes connexes de deux points d'un compact sont séparées ou non. Nous allons retrouver cette proposition 1.1.4 dans la preuve du théorème du continuum du chapitre 2.

Signalons maintenant notre contribution sur l'étude des continua, elle est donnée par les théorèmes 1.1.5 et 1.1.6. Soulignons que le théorème 1.1.5 nous ouvrira la voie pour généraliser le théorème du continuum, dans le cas des espaces de dimension infinie.

L'approche pour laquelle nous avons opté pour atteindre ces objectifs est la méthode de G.Cantor; elle consiste à étudier les espaces connexes par la notion d' « être bien enchaîné ».

Ce paragraphe est inspiré de K. KURATOWSKI **[10]**, de T. WHYBURN **[16]** et de S. B. NADLER **[13]**.

Définition 1.1.1

Soit A un sous-ensemble non vide de X ; on dit que A est un continuum s'il est compact et connexe.

Remarques 1.1.1

Certaines propriétés des continua sont des conséquences immédiates des théorèmes sur la connexité et la compacité . En voici donc quelques unes :

a) Le produit de continua est un continuum . Inversement , si un produit d'espaces non vides est un continuum , chacun d'eux est un continuum.

b) La réunion finie de continua dont les intersections deux à deux sont non vides, est encore un continuum.

c) L'image continue d'un continuum est un continuum .

d) Toute composante connexe d'un espace métrique compact est un continuum .

Définition 1.1.2

Soit $\varepsilon > 0$. On dit qu'une famille finie d'éléments $(a_1, a_2, ..., a_m)$ de X est une ε- chaîne , si $d(a_i , a_{i+1}) \leq \varepsilon$ pour $i = 1, m-1$

Deux points x et y de X sont dits bien enchaînés si quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe une ε- chaîne $(a_1 , a_2, ... ,a_m)$ de X telle que $a_1 = x$ et $a_m = y$.

Lemme 1.1.1

Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in X$. Soit $E_\varepsilon(a)$ l'ensemble des points de X qui peuvent être reliés à a par une ε-chaîne . Alors $E_\varepsilon(a)$ est à la fois ouvert et fermé .

Démonstration

$E_\varepsilon(a)$ est un ouvert car si $x_0 \in E_\varepsilon(a)$ et si $x \in B_\varepsilon(x_0)$ alors il est clair que $x \in E_\varepsilon(a)$.

D'autre part $E_{\varepsilon}(a)$ est fermé car si $x_0 \notin E_{\varepsilon}(a)$ et si $x \in B_{\varepsilon}(x_0)$ alors $x \notin E_{\varepsilon}(a)$. □□

Proposition 1.1.1

Un sous-ensemble compact A de X est un continuum si et seulement si deux points quelconques de A sont bien enchaînés

Démonstration

Supposons A connexe. Soit donc $a \in A$, alors $E_{\varepsilon}(a)$ est non vide (car contenant a) ouvert et fermé d'après le lemme précédent, ainsi $E_{\varepsilon}(a) = A$. Maintenant si x et $y \in A$, alors il existe un ε-chaîne $(a_1,a_2,...,a_n)$ qui relie x à a et telle que $a_1 = x$ et $a_n = a$. De même il existe un ε-chaîne $(b_1,b_2,...b_m)$ qui relie y à a et vérifiant $b_1 = y$ et $b_m = a$; Ainsi $(a_1,a_2,...a_n,b_{m-1},b_{m-2},...,b_1)$ est une ε-chaîne qui relie x à y.

Supposons maintenant que A ne soit pas connexe .

Soit $U \cup V$ une disconnexion de A. Mais puisque A est compact alors les complémentaires dans A de U et de V sont des compacts non vides et disjoints et donc il existe $\varepsilon > \mathbf{0}$ tel que la distance entre eux est égale à ε. Par conséquent, un point de U ne peut donc être relié à un point de V par une ε/4- chaîne de A et ainsi les points de A ne sont pas bien enchaînés. □□

Remarque 1.1.2

Cette notion d' « être bien enchaîné » permet de simplifier considérablement l'étude des continua dans les espaces métriques. Toutefois les deux notions , à savoir la connexité et « être bien enchaîné » ne sont équivalentes que lorsque l'ensemble est compact. Considérons en effet l'ensemble des rationnels muni de la topologie usuelle de IR, il est bien enchaîné mais l'on sait fort bien qu'il n'est pas connexe .

Lemme 1.1.2

Soit $\{X_i\}_{i \geq 0}$ une famille dénombrable d'espaces métriques compacts telle que $X_i \supset X_{i+1}$ et soit

$$X_\infty = \bigcap_{i \geq 0} X_i .$$

Si U est un ouvert de X_1 tel que $U \supset X_\infty$, alors il existe N tel que $U \supset X_i$, pour tout $i \geq N$.

Démonstration

Soit $F_k = \{ x \in X_1 \mid x \in X_k \setminus U \}$, $k = 1, 2, 3, ...$

Alors F_k est fermé pour tout k et les F_k forment une suite décroissante de fermés dont l'intersection est vide. Alors d'après la propriété de l'intersection finie, il existe N tel que $F_N = \varnothing$, c'est-à-dire pour tout $i \geq N$, $X_i \subset U$. □□

Lemme 1.1.3

Soit $\varepsilon > 0$ et $\{ X_i \}_{i \geq 0}$ une famille dénombrable d'espaces métriques compacts telle que pour tout $i \geq 0$ on ait $X_i \supset X_{i+1}$ et soit

$$X_\infty = \bigcap_{i \geq 0} X_i$$

Si, pour tout i, tout couple de points de X_i peut être relié par une ε-chaîne dans X_i , alors tout couple de points de X_∞ peut être relié par une 2ε- chaîne dans X_∞.

Démonstration

D'après le lemme précédent, il existe un entier N tel que

$$X_N \subset B_{\varepsilon/2}(X_\infty) = \bigcup_{x \in X_\infty} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$$

Si a et b sont deux points de X_∞, on peut par hypothèse les relier dans X_N par une ε-chaîne

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$ telle que $a_1 = a$ et $a_m = b$

Pour tout i compris entre 2 et m-1, prenons un point x_i dans l'ensemble $B_{\varepsilon/2}(a_i) \cap X_\infty$, qui n'est pas vide. Ainsi nous obtenons la liste

$(a, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, b)$

qui est bien une 2ε - chaîne dans X_∞, car

$d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_i, a_i) + d(a_i, a_{i+1}) + d(a_{i+1}, x_{i+1}) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon + \varepsilon/2$. □□

Théorème 1.1.2

Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de continua telle que $X_i \supset X_{i+1}$

et soit $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$.

Alors X_∞ est un continuum.

Démonstration

Nous supposons tous les X_i non vides (car alors la proposition est immédiate)

a) X_∞ est compact, car il s'agit d'un sous ensemble fermé du compact X_1

b) X_∞ est connexe.

En effet d'après le Lemme 1.1.3 , deux points quelconques de X_∞ sont bien enchaînés et, par la proposition 1.1.1, X_∞ est un continuum. □□

Définition 1.1.3

Soit K un sous-ensemble compact de X et soit $a \in K$.

On appelle composante connexe de a dans K la réunion de tous les sous-ensembles connexes de K contenant a; on la note $\boldsymbol{C_K\ (a)}$.

Remarque 1.1.3

a) $C_K\ (a)$ est connexe d'après la remarque 1.1.1 b). Il est non vide car $\{a\}$ est contenu dans K.

b) $C_K\ (a)$ est fermé, car sa fermeture étant connexe lui est donc égale ; c'est le plus grand continuum de K contenant a .

c) $\{C_K\ (x)\}_{x \in K}$ forme une partition de K .

Proposition 1.1. 3

Soit K un compact de X et soient a et b deux points de K. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $b \in C_K\ (a)$

(ii) a et b sont bien enchaînés dans K

Démonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$

Si $b \in C_K\ (a)$ alors, d'après la proposition 1.1.1, a et b sont bien enchaînés dans $C_K\ (a)$, donc dans K.

$(i) \Leftarrow (ii)$

Soit $m > 0$ et $E_{1/m}(a)$ l'ensemble des points de K pouvant être reliés à a par une (1/m)-chaîne dans K. D'après le lemme 1.1.1, c'est un fermé de K et donc $E_{1/m}(a)$ est compact. Considérons maintenant la famille $\{ E_{1/\, m+n}(a) \}_{n \geq 0}$, formée d'une suite décroissante de compacts; pour tout $k \geq o$ nous avons $E_{1/m}(a) \supset E_{1/m+k}(a)$, c'est-à-dire deux points quelconques de $E_{1/m+k}(a)$ peuvent être reliés par une (1/n)-chaîne et donc d'après le lemme 1.1.3, on peut relier par une (2/m) - chaîne deux points quelconques de l'ensemble

$$E_\infty = \bigcap_{n\geq 1} E_{\frac{1}{n}}(a) = \bigcap_{n\geq m} E_{\frac{1}{n}}(a)$$

Comme ceci est vrai quel que soit m , tout couple de points de l'ensemble compact E_∞ sont bien enchaînés, et donc E_∞ est un continuum. Ainsi $E_\infty \subset C_K(a)$. Nous venons donc de montrer que si b est bien enchaîné à a, alors $b \in C_K(a)$. □□

Proposition 1.1. 4

Soit K un sous ensemble compact de X et soient x et y deux points de K tels que $C_K(x) \neq C_K(y)$. Alors il existe deux ouverts disjoints U et V de X tels que $x \in U$ et $y \in V$ et $K \subset U \cup V$.

Démonstration

D'après la proposition 1.1.3, nous avons

$$C_K(x) = \bigcap_{r>0} E_r(x)$$

Puisque $C_K(x)$ et $C_K(y)$ sont distinctes alors leur intersection est vide; il existe donc $r > 0$ tel que $y \notin E_r(x)$. Mais d'après le lemme 1.1.1, $E_r(x)$ est à la fois ouvert et fermé, par conséquent $E_r(x)$ et $K \cap (X \setminus E_r(x))$ sont des compacts de K dont la distance entre eux est strictement supérieure à r. Posons maintenant $U = B_{r/2}\ (E_r(x))$ et $V = B_{r/2}\ (K \cap X\setminus E_r(x))$ et on obtient ainsi la conclusion demandée. □□

Le théorème suivant est notre contribution à l'étude des continua dans les espaces métriques compacts.

Théorème 1.1.5

Soient K un sous-ensemble compact de X et $\{ C_n \}_{n \in IN}$ une suite de continua contenus dans K. Supposons de plus qu'il existe une suite $\alpha_n \to \alpha$ telle que $\alpha_n \in C_n$. Alors $C_\infty = \{ x \in K \,/\, \exists x_n \to x,\ \text{avec } x_n \in C_{k(n)} \text{ et } k(n) \to \infty \}$ est aussi un continuum.

Démonstration

On peut supposer que les C_n sont tous non vides.

a) Vérifions tout d'abord que C_∞ est compact

K étant compact alors il nous suffira d'établir que C_∞ est fermé.

Soit donc $(y_p)_{p \geq 1}$ une suite de C_∞ et $y_p \to y$. Nous allons alors montrer que $y \in C_\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que $x_n \in C_{k(n)}$, pour $n \geq 1$, où $k(n) \to \infty$ et cette suite converge vers y.

Construisons par récurrence cette suite.

Puisque $y_1 \in C_\infty$, alors soit $\{y_{1,n}\}_{n \geq 1}$ une suite telle que $y_{1,n} \in C_n$, pour chaque $n \geq 1$ et que

$$y_{1,n_k} \to y_1 \text{, pour une suite croissante d'indices } n_k \to \infty \text{ avec } k.$$

Choisissons $n_1 = n_{k_1}$ parmi les n_k et posons $x_{n_1} = y_{1,n_{k_1}}$ et satisfaisant à

$$d(x_{n_1}, y_1) \leq \frac{1}{1}, \quad \text{avec } x_{n_1} \in C_{n_1}$$

Supposons $n_1 < n_2 < \ldots < n_{p-1}$ et $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{p-1}}$ sont choisis et tels que

$$d(x_{n_k}, y_k) \leq \frac{1}{k}, \text{ pour chaque } k = 1, \ldots, p-1.$$

Alors, puisque $y_p \in C_\infty$, soit $\{y_{p,n}\}_{n \geq 1}$ une suite telle que $y_{p,n} \in C_n$ pour chaque $n \geq 1$ et que

$$y_{p,n_k} \to y_p, \text{ pour une suite croissante d'indices } n_k \to \infty \text{ avec k.}$$

Choisissons maintenant $n_p > n_{p-1}$ et posons $x_{n_p} = y_{p,n_{k_p}}$ et satisfaisant à

$$d(x_{n_p}, y_p) \leq \frac{1}{p}, \text{ avec } x_{n_p} \in C_{n_p}.$$

Nous avons d'une part, par hypothèse, $d(y_p,y) \to 0$, quand $p \to \infty$, et d'autre part la suite

$$(x_{n_p})_{p \geq 1} \text{ telle que } x_{n_p} \in C_{n_p} \text{ et } d(x_{n_p}, y_p) \to 0, \text{ quand } p \to \infty.$$

Alors cette suite $(x_{n_p})_{p\geq 1}$ est telle que $d(x_{n_p}, y) \to 0$, quand $n_p \to \infty$. Nous construisons alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ comme suit: les indices n_p formant une suite croissante, nous choisissons donc $x_n \in C_n$ et $n \in \{n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots\}$ et la suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ainsi construite possède bien une sous-suite convergente vers y; ce qui prouve que $y \in C_\infty$ qui est donc fermé.

b) Montrons maintenant que C_∞ est connexe.

Supposons le contraire, et soient donc E et F deux fermés disjoints de X tels que

$$C_\infty \subset E \cup F, \quad C_\infty \cap E \neq \varnothing \neq C_\infty \cap F$$

Or $C_\infty \cap E$ et $C_\infty \cap F$ sont des fermés dans le compact C_∞ dans l'espace métrique compact X qui est donc normal; alors il existe deux ouverts disjoints U et V de X qui recouvrent C_∞ et qui contiennent respectivement les fermés $C_\infty \cap E$ et $C_\infty \cap F$ et tels que

$$C_\infty \cap U \neq \varnothing, \quad C_\infty \cap V \neq \varnothing.$$

On peut supposer de plus $\alpha \in C_\infty \cap U$ et soit $b \in C_\infty \cap V$; alors nous avons par hypothèse $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha_n \in C_n$ et $\exists\, (x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in C_n$ telle que $x_{n_k} \to b$. Choisissons n_0 tel que $x_n \in V$ et $\alpha_n \in U$, pour tout $n > n_0$. Posons n_1 tel que si $n > n_1$ alors $k_n > n_1$ et $C_{k(n)} \cap U \neq \varnothing$ et $C_{k(n)} \cap V \neq \varnothing$ et comme $C_{k(n)}$ est connexe, il ne peut pas être recouvert par les deux ouverts disjoints U et V. Il existe donc x_n dans $C_{k(n)}$ et que $x_n \in K \setminus (U \cup V)$; $\{x_n\}$ admet donc une sous-suite qui converge vers un certain x dans $K \setminus (U \cup V)$. Finalement par définition de C_∞, $x \in C_\infty$ sans être dans $U \cup V$ ce qui contredit notre hypothèse que C_∞, est contenu dans $U \cup V$; d'où C_∞ est connexe. □ □

Remarque 1.1.4

Soulignons en passant que sans l'hypothèse ($\exists\ \alpha_n \to \alpha$ avec $\alpha_n \in C_n$) la conclusion de ce théorème 1.1.5 ne tient plus; en effet, il suffit de considérer la famille $\{C_n\}_{n\geq 1}$ de continua de IR telle que $C_{2n} = \{0\}$ et $C_{2n+1} = \{1\}$.Dans ce cas $C_\infty = \{0,1\}$ n'est pas un continuum.

Le résultat qui suit est une propriété des continua dans le compact I^2. Géométriquement il dit ceci: pour tout C, un continuum de I^2 interceptant les côtés horizontaux de I^2 et tout D un continuum de I^2 interceptant les côtés verticaux de I^2 on a $C \cap D \neq \emptyset$.

Proposition 1.1.6

Soient C et D deux continua de I^2 vérifiant la condition

$$\textit{(1)}\quad \begin{cases} C \cap {}_0 I \neq \emptyset \neq C \cap {}_1 I \\ D \cap I_0 \neq \emptyset \neq D \cap I_1 \end{cases}$$

Alors C et D ont au moins un point commun.

Démonstration

Soit D un continuum de I^2 vérifiant la condition **(1)** et supposons qu'il existe un continuum C de I^2 rencontrant les côtés verticaux de I^2 mais qui n'intersecte pas D. Notons

$$D' = D \cup (I \times [-\infty, 0]) \cup (I \times [1, +\infty[)$$

(a) Étudions les composantes connexes de D'^c. Supposons G une composante connexe de D'^c qui n'est pas ouverte. Soit alors $x \in G \setminus \overset{0}{G}$; ainsi $x \in \partial G = G \setminus \overset{0}{G}$ =

$\overline{G} \cap \overline{G^c}$. Ainsi $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ où $x_n \in G^c$, on a donc soit $x_n \in D'$ ou soit $x_n \in G'$ une autre composante connexe de D'^c distincte de G. Dans les deux cas le segment $I(x,x_n)$ joignant x à x_n intersecte D'. En effet, sinon $I(x,x_n) \subset D'^c$ et comme $I(x,x_n)$ est connexe, alors x et x_n se trouvent dans une même composante; ce qui est absurde. Par conséquent, il existe $y_n \in D'$ telle que y_n converge vers x; mais alors $x \in D'$, ce qui est impossible. D'où $G \setminus \overset{0}{G} = \varnothing$.

(b) Les composantes connexes de D'^c sont ouvertes. Ainsi donc les composantes connexes de D'^c sont connexes par arcs.

(c) Si deux tels continua C et D ne s'intersectent pas, alors $C \cap {}_0I$ et $C \cap {}_1I$ se trouvent dans une même composante connexe du complémentaire du premier continuum, D. Et donc, il existe un arc α joignant x et y deux points respectifs de $C \cap {}_0I$ et $C \cap {}_1I$. On peut supposer que α est une courbe simple β. En effet, soit H la composante connexe de D'^c qui contient C et soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < d(D,H)$, alors il existe $m > 0$ et une ligne polygonale simple β tels que $\forall t \in [0.1]$, on a $d(\alpha(t),\beta(t)) < \varepsilon$ et β est formé des segments de droite dont les extrémités sont deux points de $1/2^n$ (IN×IN). On peut donc supposer que le continuum C est une courbe simple β contenue dans la composante H et $\beta(I) \cap D = \varnothing$.

(d) Le même raisonnement nous permet de remplacer le continuum D par une courbe γ telle que $\gamma(I) \cap H = \varnothing$, donc $\gamma(I) \cap C = \varnothing$.

(e) Complétons l'une des courbes simples, par exemple β, pour obtenir une courbe simple fermée contenant en son intérieur le côté horizontal inférieur I_0, et appelons φ cette nouvelle courbe. Alors d'après le théorème de JORDAN **[6]** , $\varphi(I)$ partage IR^2 en deux composantes dont l'une est bornée; posons U cette composante. U contient I_0. L'autre composante contient I_1. D'après le théorème du passage aux douanes, la courbe simple γ intersecte la frontière de U, nécessairement φ(I) et à fortiori β(I). Ce qui est contradictoire . D'où les continua C et D ont au moins un point commun. □□

1. 2 LES CONTINUA LOCALEMENT CONNEXES

Nous allons aborder dans ce paragraphe une étude locale des continua. Pour cela nous allons introduire le concept de connexité locale. Nous clôturerons alors cette étude par le **théorème de Hahn-Mazurkiewicz**, théorème qui stipule que les continua localement connexes ou encore les espaces dits de Peano, sont exactement les courbes paramétrées. Pour atteindre cette conclusion, nous introduirons la **propriété de Sierpinski** qui occupe un rôle très important, voire déterminant, à l'endroit de la structure des espaces de Peano.

Enfin, nous donnerons un bref rappel sur les fonctions multivoques; l'un des résultats importants sur cette notion sera le **théorème 1.2.7**. Ce théorème nous permettra de construire un paramétrage de la courbe, c'est-à-dire de l'espace de Peano.

Ce paragraphe est inspiré de S.B. NADLER **[13]** et de T.G. WHYBURN **[16]**

Définition 1.2.1

Soit a un point de X. On dit que X est localement connexe en a si pour tout voisinage V de a , il existe un voisinage connexe U de a tel que $U \subseteq V$.

L'espace X est localement connexe lorsqu'il l'est en chacun de ses points.

De même un sous-ensemble A de X est localement connexe si, pour tout point a de A et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que $V \subseteq B_\varepsilon(a)$ et $V \cap A$ soit connexe .

Exemples 1.2.1

Cette propriété enrichira la caractérisation de continua car le fait d'être un espace localement connexe est une propriété locale, tandis que le fait d'être connexe est globale. Ces deux propriétés n'ont donc aucun rapport l'une avec l'autre.

1) Considérons dans le plan IR^2 l'ensemble C formé des axes $x = 0$, $y = 0$ et des droites d'équations $x = r$ où r est un nombre rationnel; C est un ensemble connexe.

D'autre part, soit $b \neq 0$ et $0< \alpha< |b|$. Alors la boule $B_\alpha(0,b)$ de IR^2 de centre $(0,b)$ et de rayon α tracera sur C une partie non connexe. Ainsi C n'est pas localement connexe.

2) Deux droites disjointes de IR^2 constituent une partie localement connexe mais qui n'est pas connexe.

Remarque 1.2.1

Voici quelques propriétés immédiates liées à la connexité locale.

1) L'espace X est localement connexe si et seulement si toute composante d'un ensemble ouvert A dans X est un ensemble ouvert . En particulier les composantes connexes d'un espace localement connexe sont ouvertes .

2) Les composantes connexes d'un espace localement connexe constituent une partition de X formée d'ensembles ouverts dans X. Ainsi si de plus l'espace X est compact alors il possède un nombre fini de composantes connexes.

3) Si X est localement connexe en un point a, tout ouvert contenant a l'est aussi.

Définition 1.2.2

Un sous-ensemble non vide A de X possède la propriété $\mathcal{S}$ *dite de Sierpinski si pour chaque* $\varepsilon > 0$ *,il existe un nombre fini de sous-ensembles connexes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de A tels que*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \text{ diamètre de } A_i < \varepsilon, \text{ pour chaque } i = 1, \ldots n$$

<u>Théorème1.2.1</u> (de Sierpinski)

Soit A un continuum contenu dans l'espace métrique X. Pour que A soit localement connexe il faut et il suffit qu'il possède la propriété $\mathcal{S}$ et que le recouvrement soit formé par des continua.

<u>Démonstration</u>

$\Rightarrow$

Supposons que le continuum A est localement connexe; soit $\varepsilon > 0$ et recouvrons A avec les différentes composantes connexes des boules $B_{\varepsilon/2}(x)$,x parcourant A. D'après la remarque 1.2.1 1), ces composantes connexes sont ouvertes, on peut donc en extraire un recouvrement fini $G_1,\ldots,G_n$; les ensembles $C_i = \overline{G_i}$ recouvrent aussi A; la fermeture d'un connexe étant connexe, alors les C_i sont des continua et comme chaque G_i est une composante d'un certain $B_{\varepsilon/2}(x)$, on a alors $C_i \subset B_\varepsilon(x)$, $1 \leq i \leq n$, d'où $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ est un recouvrement de A par des continua dont le $\mathrm{diam}(C_i) < \varepsilon$, pour chaque $i = 1, \ldots, n$.

$\Leftarrow$

Soit $A \subseteq X$, A un continuum qui vérifie la propriété $\mathcal{S}$; soit $\varepsilon>0$ et p un point de A, soit $(A_1, A_2,\ldots,A_n)$ un recouvrement fini de A par des sous-ensembles connexes, tels que $\mathrm{diam}(A_i)<\varepsilon$ pour tout $i = 1,2,\ldots,n$; posons maintenant

$$m_p = \begin{cases} \min\{d(p,A_i) \,/\, p \notin A_i\} & \text{si } p \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ 1 & \text{si } p \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \end{cases}$$

Soit maintenant C la réunion des A_i qui contiennent le point p; si $0< r < m_p$, on a

$$B_r(p) \subset C \subset B_\varepsilon(p)$$

Donc C est bien un voisinage connexe de p, contenu dans $B_\varepsilon(p)$; ainsi A est localement connexe. □□

Définition 1.2.3

*On dit que l'espace X est un **espace de Peano** s'il est un continuum localement connexe.*

Proposition 1.2.2

L'image par une application continue d'un espace de Peano est un espace de Peano .

Démonstration

Soit X un espace de Peano et soit f une application continue de X sur Y= f(X). D'après la remarque 1.1.1, Y est un continuum.

Montrons en plus que Y est localement connexe. Soit $\varepsilon > 0$, alors puisque f est uniformément continue sur X, il existe $\delta > 0$ tel que x_1 , $x_2 \in X$ et $d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$. D'après le théorème 1.2.1, il existe un recouvrement $\{C_1, C_2,\ldots,C_n\}$ de X par des continua tels que diamètre de C_i est inférieur à δ, pour tout i; mais alors $\{ f(C_1), f(C_2), \ldots , f(C_n)\}$ forme un recouvrement de Y par des continua tels que le diamètre de $f(C_i)$ est inférieur à ε, pour tout i. En utilisant à nouveau le théorème 1.2.1 on peut conclure alors que Y est localement connexe. □□

Remarque 1.2.2

L'image par une application continue d'un espace localement connexe mais qui n'est pas compact n'est pas nécessairement un espace localement connexe.

Considérons en effet la courbe des topologistes $\{(x,\sin 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x\in]0,1]\}$ et posons

$$S = \{(x,\sin 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0,1]\} \cup T$$

où nous définissons T comme suit:

la courbe T est formée de la réunion du segment joignant les points (0,- 1) et (0,1), du demi-cercle C de centre (1/2,1) et passant par (1/2,3/2) et enfin du segment joignant les points (1,1) et (1, sin1).

L'ensemble S n'est pas localement connexe car un voisinage de rayon inférieur à 1 d'un point (0,b) où $|b| < 1$ tracera sur S un sous-ensemble qui n'est pas connexe.

Nous allons cependant montrer que S est l'image continue de l'intervalle non compact $[0,+\infty[$ qui est localement connexe.

Puisque T est une courbe simple, alors soit α un paramétrage de T, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\to T \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

une application continue et bijective telle que $\alpha(0) = (0,-1)$ et $\alpha(1) = (1,\sin(1))$.

Construisons maintenant une fonction β sur $[1, +\infty[$ à valeurs sur $S \setminus T$.

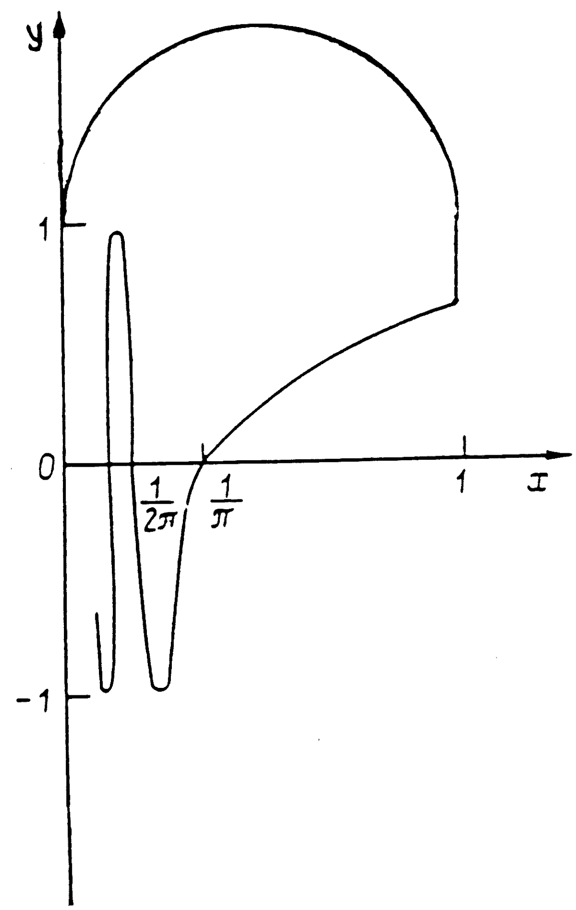
Il suffit de considérer la fonction

$$\begin{aligned} \beta : [1, +\infty[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (1/t, \sin t) \end{aligned}$$

Définissons maintenant une application continue f comme suit:

$$\begin{aligned} f : [0,+\infty[&\to S \\ t &\mapsto f(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ \beta(t) & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

[voir figure ci-dessous]



Nous concluons donc que l'image par une application continue d'un espace localement connexe mais qui n'est pas compact n'est pas nécessairement localement connexe.

Nous allons étendre ces résultats à la notion de courbe. On rappelle qu'un sous-ensemble $\mathcal{C}$ d'un espace métrique X est un arc ou une courbe s'il est l'image dans X par une application f définie et continue de [0,1] dans X ; une telle fonction f est dite un paramétrage de l'arc $\mathcal{C}$; le couple ($\mathcal{C}$,f) est appelé une courbe paramétrée; la courbe $\mathcal{C}$ est dite simple lorsque f est une homéomorphie. Si de plus, $\mathcal{C}$ est l'image d'un cercle du plan sous une homéomorphie alors elle sera dite une courbe simple fermée.

Toutes les considérations de ce paragraphe nous permettrons d'étudier aisément les propriétés topologiques d'une courbe, et des courbes du plan en particulier. Tout d'abord puisque [0,1] est un continuum, alors toute courbe $\mathcal{C}$ est un continuum. En outre , comme [0,1] est un ensemble compact et localement connexe dans IR, ainsi la courbe $\mathcal{C}$ est alors un espace de Peano. La suite aura pour but de démontrer la réciproque de ce résultat qui est le théorème de Hahn-Mazurkiewicz.

Rappelons ici que les continua qui recouvrent A selon le théorème 1.2.1 de Sierpinski peuvent ne pas être de Peano; mais il est possible de les choisir localement connexes. Cette étape est cruciale pour obtenir le Théorème de Hahn-Mazurkiewicz.

Voici tout d'abord quelques définitions techniques.

Définition 1.2.4

Soit X un espace métrique et $\varepsilon > 0$; une $S(\varepsilon)$-chaîne est une famille finie $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ satisfaisant les trois propriétés suivantes:

(1) $C_i \cap C_{i+1} \neq \varnothing$, pour chaque $i = 1, \dots, n-1$

(2) C_i est connexe pour chaque $i = 1, \dots, n$

(3) diam $(C_i) < \varepsilon / 2^i$, pour chaque $i = 1, \dots, n$.

Les C_i s'appellent les maillons de la $S(\varepsilon)$- chaîne.

Si A est un sous-ensemble de X et $\varepsilon > 0$, on définit $S(A, \varepsilon)$ comme suit:

$$\mathbf{S(A,\varepsilon)} = \{x \in X \,/\, \forall a \in A,\ \exists\ S(\varepsilon)\text{-chaîne reliant } a \text{ à } x\}$$

Toute famille finie $\{C_1,...,C_n\}$ d'ensembles satisfaisant (1) est appelée une faible chaîne ou une faible chaîne allant de C_1 à C_n. Si $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ est une faible chaîne dans X et si a et b $\in X$ tels que $a \in C_1$ et $b \in C_n$, alors on dira que c'est une faible chaîne reliant a à b.

Remarque 1.2.3

Cette notion ainsi que celle de « ε-chaîne » sont similaires; l'une a pour but de caractériser les espaces connexes et l'autre les espaces localement connexes. Voici donc à titre de remarque une propriété immédiate liée à cette notion.

Soit X un espace métrique connexe et soient p et q deux points de X. Si $\mathcal{P}$ est une famille finie non vide de sous-ensembles fermés de X et recouvrant X, alors la collection entière $\mathcal{P}$ peut être indexée de telle sorte qu'on obtienne une faible chaîne reliant p à q.

Nous allons tout d'abord donner quelques propriétés importantes de S(A,ε). En quelques mots, lorsqu'un espace possède la propriété $\mathcal{S}$ de Sierpinski, alors les propriétés qui suivent vont nous donner la technique qui permet d'obtenir un continuum beaucoup plus réduit et qui possède encore la propriété $\mathcal{S}$, à savoir l'ensemble **S(A,ε)**.

Proposition 1.2.3 [16]

Si un espace métrique X possède la propriété $\mathcal{S}$, alors, pour tout sous-ensemble A non vide de X et $\varepsilon > 0$, $S(A,\varepsilon)$ possède également la propriété $\mathcal{S}$.

Démonstration

Fixons un $\delta > 0$. Nous allons montrer que $S(A,\varepsilon) = B_1 \cup ... \cup B_n$, où chaque B_i est connexe et de diamètre $< \delta$.

Pour cela choisissons d'abord un entier positif **k** tel que

$$\textbf{(1)} \qquad \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \delta/4 \text{ , c'est-à-dire } \qquad \varepsilon/2^{k-1} < \delta/4$$

et ensuite posons

K= {y∈ S(A,ε)| ∀a∈A, ∃ S(ε)-chaîne ayant au plus k maillons, reliant a à y}.

Puisque X possède la propriété $\mathcal{S}$,alors il existe un recouvrement fini de X par des ensembles connexes chacun ayant le diamètre < $\varepsilon/2^{k+1}$; soit $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ les éléments de ce recouvrement qui intersectent K. (cet ensemble est non vide sinon K serait vide ce qui est absurde car A ⊂ K et A ≠ ∅). Notons en passant que nous avons les propriétés suivantes:

(2) $K \subset E_1 \cup .. \cup E_n$

(3) $E_i \cap K \neq \varnothing$, pour chaque i = 1,..., n

(4) E_i est connexe, pour chaque i = 1, ... , n

(5) $\text{diam}(E_i) < \varepsilon/2^{k+1}$, pour chaque i = 1,..., n

(6) $E_i \subset S(A,\varepsilon)$, pour chaque i = 1, ..., n

Il suffit de verifier **(6)** . Soit i ∈ [1, n], alors d'après **(3)** et la définition de K, il existe une S(ε)-chaîne $\{L_1, L_2, \ldots, L_t\}$ où $t \leq k$ reliant un point de A à un point de $E_i \cap K$; en ajoutant E_i à cette S(ε)-chaîne $\{L_1, L_2, \ldots, L_t, L_{t+1} = E_i\}$ on obtient une S(ε)-chaîne reliant un point de A à un point de E_i ; ce qui prouve **(6)**.

Pour chaque i ∈[1,n], posons P_i la famille des sous-ensembles M satisfaisant les propriétés suivantes:

(7) $M \subset S(A,\varepsilon)$

(8) $M \cap Ei \neq \varnothing$

(9) M est connexe

(10) $\text{diam}(M) < \delta/4$.

Maintenant posons

$$B_i = \bigcup_{M \in P_i} M \qquad , \text{ pour chaque } i = 1, \ldots, n.$$

On observe que pour chaque i, E_i vérifie les propriétés **(7) - (10)** et on a donc de plus la propriété suivante

(11) $E_i \subset B_i$, pour chaque $i = 1, \ldots, n$.

Enfin, montrons que les B_i possèdent les propriétés requises dans la définition 1.2.2. Il est clair que chaque B_i est connexe et dont le diamètre est inférieur à δ, pour chaque $i = 1, 2, \ldots$. Il nous reste à montrer que $S(A,\varepsilon) = B_1 \cup \ldots \cup B_n$.

D'après **(7)**, $B_i \subset S(A,\varepsilon)$, $\forall i \in [1,n]$, par conséquent, $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \subset S(A,\varepsilon)$.

Montrons maintenant l'inclusion inverse .

Soit $y \in S(A,\varepsilon)$; nous savons d'après **(2)** que $K \subset E_1 \cup \ldots \cup E_n$ et selon **(11)** $E_i \subset B_i$, $\forall i \in [1,n]$, ainsi donc $K \subset B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Supposons alors que $y \notin K$. Le point y étant dans $S(A,\varepsilon)$ sans être dans K, y est relié à au moins un point de A par une $S(\varepsilon)$-chaîne ayant plus de k maillons; posons donc $\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ une $S(\varepsilon)$-chaîne reliant un point de A à y telle que $m > k$ et $H = L_k \cup L_{k+1} \cup \ldots \cup L_m$. Soulignons en passant que $L_k \subset K$ et par conséquent selon **(2)** , $L_k \cap E_i \neq \emptyset$, pour un certain nombre d'indices i. Établissons maintenant que H satisfait aux propriétés **(7)** à **(10)**. Il est clair que

(7) $H \subset S(A,\varepsilon)$

(8) $H \cap E_i \neq \emptyset$, car $L_k \cap E_i \neq \emptyset$.

(9) H est connexe.

Vérifions maintenant le dernier point **(10)**; puisque $H = L_k \cup \ldots \cup L_m$ et $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ alors on a

$$\operatorname{diam}(H) \leq \operatorname{diam}(L_k) + \operatorname{diam}(L_{k+1}) + \ldots + \operatorname{diam}(L_m)$$

donc

$$\operatorname{diam}(H) \leq \varepsilon/2^k + \varepsilon/2^{k+1} + \ldots + \varepsilon/2^m .$$

L'hypothèse **(1)** nous permet donc d'obtenir **(10),** c'est-à-dire diam(H) < $\delta/4$. Puisque H satisfait (7)-(10) alors, H figure parmi les sous-ensembles M de la famille P_i et ainsi donc $H \subset B_i$; mais rappelons que y appartient à L_m qui est lui-même inclus dans H, alors $y \in B_i$. Ce qui prouve donc l'inclusion inverse. D'où $S(A,\varepsilon)$ possède la propriété de Sierpinski. □□

Proposition 1.2.4

Soit A un sous-ensemble non vide de X et $\varepsilon > 0$. Alors on a les trois propriétés suivantes:

(1) diam($S(A,\varepsilon)$) $\leq$ diam (A) + 2ε.

(2) Si A est connexe alors $S(A,\varepsilon)$ est aussi connexe.

(3) Si X possède la propriété $\mathcal{S}$ alors $S(A,\varepsilon)$ est un sous-ensemble ouvert de X.

Démonstration

(1) Selon la définition 1.2.4, le diamètre de $S(\varepsilon)$ est < ε; d'où alors (1)

(2) Les $S(\varepsilon)$-chaînes sont connexes reliées à A qui est lui-même connexe donc $S(A,\varepsilon)$ est aussi connexe.

(3) Montrons que $S(A,\varepsilon)$ est un ensemble ouvert.

Soit $y \in S(A,\varepsilon)$. Alors pour tout $a \in A$, il existe une $S(\varepsilon)$-chaîne $\{L_1, \ldots, L_n\}$ reliant a à y. Mais comme X est aussi localement connexe, alors il existe un ouvert connexe U de X contenant y dont le diamètre est inférieur à $\varepsilon/2^{n+1}$. Il est clair que la famille $\{L_1, \ldots, L_n, L_{n+1} = U\}$ est une $S(\varepsilon)$-chaîne reliant un point a de A à un point de U. Par conséquent $U \subset S(A,\varepsilon)$. □□

Rappelons que si A est un sous-ensemble connexe d'un espace topologique alors son adhérence ainsi que toute partie comprise entre les deux sont aussi connexes. Nous avons un résultat similaire à celui-ci concernant la propriété $\mathcal{S}$.

Lemme 1.2.1

Soit $A \subset X$ et A possédant la propriété $\mathcal{S}$. Alors tout sous-ensemble A_0 tel que

$A \subset A_0 \subset \overline{A}$ possède aussi la propriété $\mathcal{S}$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ tel que A_i est connexe et $\mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon$, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors la fermeture des A_i , $i = 1, \ldots, n$, dans A_0 forme aussi un recouvrement connexe de A_0 et dont le diamètre est inférieur à ε. □□

Proposition 1.2.5

Si un espace métrique X possède la propriété $\mathcal{S}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, X est la réunion d'un nombre fini de sous-ensembles connexes de diamètre chacun inférieur à ε et possédant chacun la propriété $\mathcal{S}$; de plus ces sous-ensembles peuvent être choisis soient ouverts ou fermés dans X.

Démonstration

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des sous-ensembles connexes tels que $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ et tels que $\mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon$ pour chaque i. Selon la proposition 1.2.3, les $S(A_i,\varepsilon/3)$ possèdent aussi la propriété $\mathcal{S}$ et recouvrent aussi X; enfin la proposition 1.2.4 nous assure que les $S(A_i,\varepsilon/3)$ sont des ouverts et dont le diamètre est inférieur à ε. Pour obtenir des éléments du recouvrement qui sont des ensembles fermés, il suffit de prendre les $\overline{S(A_i, \frac{\varepsilon}{3})}$ qui eux-mêmes possèdent la propriété $\mathcal{S}$ selon le lemme précédent. □□

Théorème 1.2.6

Si X est un espace de Peano, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, X est recouvert par une famille finie de sous-ensembles de Peano et dont le diamètre de chaque élément du recouvrement est inférieur à ε.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; d'après le théorème de Sierpinski, X possède alors la propriété $\mathcal{S}$ et selon la proposition 1.2.5 et à nouveau le théorème de Sierpinski, peut donc être recouvert par des continua localement connexes tels que le diamètre de chaque continuum du recouvrement soit inférieur à ε. $\square$

Voici maintenant un rappel sur la notion de fonctions multivoques et quelques propriétés fondamentales. Le but de ce détour est d'obtenir une technique qui nous permettra de construire une fonction continue servant de paramétrage pour un espace de Peano.

Définition 1.2.5

Soient $(X,\mathcal{U})$ et $(Y,\mathcal{V})$ deux espaces topologiques et soit

$$\mathcal{F}(Y) = \{ A \subset Y / A \text{ est fermé et non vide} \}$$

Une fonction $F: X \to \mathcal{F}(Y)$ est dite semi-continue supérieurement à un point $p \in X$, on note F est scs en p, si

$\forall V \in \mathcal{V}$ *tel que* $F(p) \subset V$, $\exists U \in \mathcal{U}$. $p \in U$ *et* $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.

La fonction F sera dite scs sur X, si elle l'est en tout point de X.

Remarque 1.2.4

Soient $(X,\mathcal{U})$ et $(Y,\mathcal{V})$ deux espaces topologiques, et soit $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ scs. Si F(x) est un singleton y_x , $\forall\, x \in X$, alors la fonction $f : X \to Y$ définie par $f(x) = y_x$, pour chaque $x \in X$, est continue.

Lemme 1.2.2

Soit X et Y deux espaces métriques compacts non vides. Pour chaque n = 1, 2, ... , soit $F_n : X \to \mathcal{F}(Y)$ une fonction scs telle que

$$F_n(x) \supset F_{n+1}(x),\ \forall x \in X \text{ et } \forall n = 1,2,....$$

Pour chaque $x \in X$, *soit* $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. *Alors les propriétés suivantes sont vérifiées:*

(1) $G: X \to \mathcal{F}(Y)$ *et G est une fonction scs.*

(2) *Si* $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$, *pour chaque n = 1,2,...,alors* $Y = \bigcup_{x \in X} G(x)$

Démonstration

(1) Montrons que G est une fonction scs.

D'abord, il est clair que $G(x) \neq \varnothing$, $\forall x \in X$, comme étant l'intersection d'une suite décroissante de sous ensembles fermés de l'espace compact Y. Maintenant soit $p \in X$ et soit V un ouvert de Y contenant $G(p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(p)$. D'après le lemme 1.1.2, il existe alors un entier N tel que $F_N(p) \subset V$. Puisque F_N est une fonction scs, alors il existe un ouvert U de X contenant p et tel que $F_N(x) \subset V$, pour tout $x \in U$. Comme $G(x) \subset F_N(x)$, pour tout $x \in X$, alors $G(x) \subset V$ pour tout $x \in U$; ce qui prouve donc que G est scs en p.

(2) Soit $q \in Y$ et montrons que $q \in \bigcup_{x \in X} G(x)$.

Puisque $q \in \bigcup_{x \in X} F_n(x)$ pour chaque n = 1, 2, ..., alors pour chaque n, il existe $x_n \in X$ tel que

(1) $q \in F_n(x_n)$.

Or l'espace X est compact, alors la suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ possède une sous-suite $\{x_{n(i)}\}_{i \geq 1}$ qui converge vers un certain point p de X. Montrons que $q \in G(p)$. Supposons au contraire que $q \notin G(p)$ et posons $V = Y \setminus \{q\}$; V est alors un ouvert de Y contenant

G(p), c'est-à-dire $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(p) \subset$ V; encore d'après le lemme 1.1.2, il existe un entier N tel que $F_k(p) \subset V$, pour tout $k \geq N$; puisque F_N est une fonction scs sur X, alors par la définition 1.2.5 il existe un ouvert U de X contenant le point p, tel que

(2) $F_N(x) \subset V$, pour tout $x \in U$.

Puisque la sous-suite $\{x_{n(i)}\}_{i \geq 1}$ converge vers p alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que $n(k) \geq N$ et $x_{n(k)} \in U$. Alors d'après **(2)**, nous avons

(3) $F_N(x_{n(k)}) \subset V$.

Comme $n(k) \geq N$, alors $F_N(x_{n(k)}) \supset F_{n(k)}(x_{n(k)})$. Mais comme $q \in F_{n(k)}(x_{n(k)})$ alors $q \in F_N(x_{n(k)})$. D'après **(3)** alors $q \in V$, ce qui est impossible car $V = Y \setminus \{q\}$. D'où la conclusion qui dit que $q \in G(p)$. □□

Voici maintenant un théorème général sur les fonctions multivoques. Ce théorème, comme nous l'avons annoncé au début de ce chapitre, est en quelque sorte une forme fonctionnelle du théorème 1.1.2, qui lui est de nature ensembliste.

<u>Théorème 1.2.7</u> [13]

Soient X et Y deux espaces métriques compacts non vides. On suppose que les quatre propriétés suivantes sont vérifiées:

(1) $F_n(x): X \to \mathcal{F}(Y)$ *est scs pour chaque* $n = 1, 2, \ldots;$

(2) $F_n(x) \supset F_{n+1}(x)$ *pour chaque* $x \in X$ *et pour chaque* $n = 1, 2, \ldots;$

(3) $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$ *pour chaque* $n = 1, 2, \ldots;$

(4) $\lim_{n \to \infty} diam[F_n(x)] = 0$ *pour chaque* $x \in X$

Alors la fonction multivoque $G : X \to \mathcal{F}(Y)$ *définie par* $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, $x \in X$, *est en fait une fonction continue et surjective de X dans Y.*

Démonstration

D'après (1), (2) et (4), G(x) est réduit à un singleton, pour chaque $x \in X$; G ainsi définie est bel et bien une fonction de X dans Y et d'après (2) du lemme 1.2.2, G est surjective. Enfin G est bien continue d'après la remarque 1.2.4 et (1) du lemme 1.2.2. □□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème de HAHN-MAZURKIEWICZ.

Théorème 1.2.8 [de Hahn-Mazurkiewicz]

Un espace métrique X est un espace de Peano si et seulement si X est l'image continue de l'intervalle $I = [0,1]$.

Démonstration

Un espace de Peano étant un continuum localement connexe par définition alors d'après le théorème 1.2.6 et la remarque 1.2.3, il existe une faible chaîne $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ recouvrant X et telle que A_i sont des continua localement connexes et dont le diamètre est inférieur à 1.

Écrivons l'intervalle $I = [0,1]$ comme la réunion de n intervalles fermés non réduits en un singleton, notés $I_1, I_2, \ldots, I_n$, et ayant la forme

$$I_i = [t_{i-1}, t_i]\,,\ 1 \leq i \leq n\,,\quad \text{où}\quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$$

Posons $\mathcal{C}(X) = \{\, A \mid A \text{ est fermé et connexe, } A \subset X \,\}$. Définissons F_1 par

$$F_1 : [0,1] \to \mathcal{C}(X)$$

$$t \mapsto F_1(t) = \begin{cases} A_i, & \text{si } t \in I_i \setminus \{t_{i-1}, t_i\} \\ A_i \cup A_{i+1} & \text{si } t = t_i \text{ et } 1 \le i \le n-1 \\ A_1, & \text{si } t = 0 \\ A_n, & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Alors les I_i peuvent être choisis tels F_1 vérifie (1) et (3) du théorème 1.2.7, c'est-à-dire F_1 est scs sur [0,1] et que

$$X = \bigcup_{t \in I} F_1(t).$$

Nous allons maintenant construire le deuxième terme F_2.

Choisissons $p_1 \in A_1$ et $p_i \in A_i \cap A_{i-1}$ pour $2 \le i \le n$, et $p_{n+1} \in A_n$. Alors selon encore le théorème 1.2.7 et la remarque 1.2.3 appliqués à chaque A_i, il existe pour chaque i, $1 \le i \le n$, une faible chaîne $\{A_1^i, \ldots, A_{m(i)}^i\}$ reliant p_i à p_{i+1}, recouvrant A_i, et dont les maillons sont des continua localement connexes et tel que diam $(A_k^i) < 1/2$, pour chaque k = 1, ..., m(i).

Pour chaque i, $1 \le i \le n$, écrivons I_i comme la réunion de m(i) intervalles fermés $I_1^i, I_2^i, \ldots, I_{m(i)}^i$ ayant la forme suivante

$$I_k^i = [t_{k-1}^i, t_k^i] \text{ et } 1 \le k \le m(i),$$

où

$$t_0^i = t_{i-1} < t_1^i < t_2^i < \ldots < t_{m(i)}^i = t_i.$$

Nous définissons maintenant F_2 par

$F_2 : [\,0\,,1\,] \;\rightarrow\; \mathscr{C}(X)$

$$t \quad \mapsto \quad F_2(t) = \begin{cases} A_k^i, & \text{si } t \in I_k^i - \left\{t_0^i, \ldots, t_{m(i)}^i\right\} \\ A_k^i \cup A_{k+1}^i, & \text{si } t = t_k^i \text{ et } 0 < k < m(i) \\ A_{m(i-1)}^{i-1} \cup A_1^i, & \text{si } t = t_0^i \text{ et } 2 \leq i \leq n \\ A_1^1, & \text{si } t = 0 \\ A_{m(n)}^n, & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

On vérifie aussi que F_2 satisfait aux conditions (1) et (3) du théorème 1.2.7.

En continuant ce procédé il est facile de vérifier qu'on obtient une suite de fonctions multivoques $\{ F_n \}_{n \geq 1}$ satisfaisant aux conditions (1)-(4) du théorème 1.2.7. Ainsi, il existe donc une fonction continue f de [0,1] sur X. □□

1.3 EXEMPLES DE CONTINUA

Exemple 1.3.1: La courbe de Peano

Le théorème de Hahn-Mazurkiewicz nous assure que le carré $\mathbf{[0,1]^2}$, puisque c'est un espace de Peano, est donc une courbe dite de Peano, ce qui semble paradoxal. Nous allons montrer comment, dans ce cas précis, construire un paramétrage de cette courbe; cet exemple illustrera le théorème de Hahn-Mazurkiewicz.

Proposition 1.3.1 [Peano, 1890]

Le carré $[0,1]^2$ est une courbe paramétrée.

Démonstration (due à Hilbert)

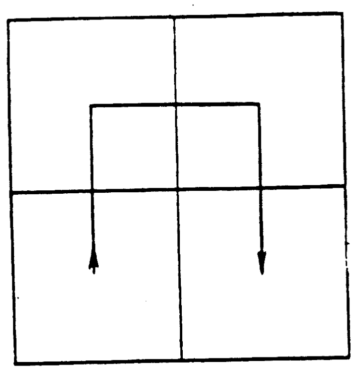
Posons d'abord $I = [0,1]$ et $C = I^2$.

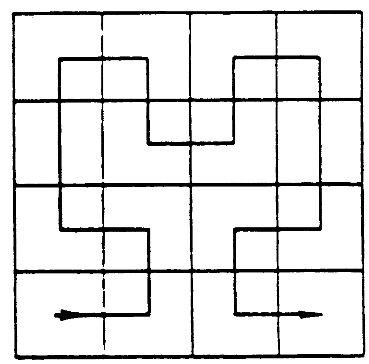
L'idée de la construction est la suivante. À la n-ième étape, l'intervalle I et le carré C sont divisés en 4^n intervalles congrus ${}^nI_i$ et carrés congrus ${}^nC_i$, $1 \leq i \leq 4^n$, respectivement. Les intervalles sont numérotés dans l'ordre naturel de gauche à droite. Les carrés sont numérotés comme suit:

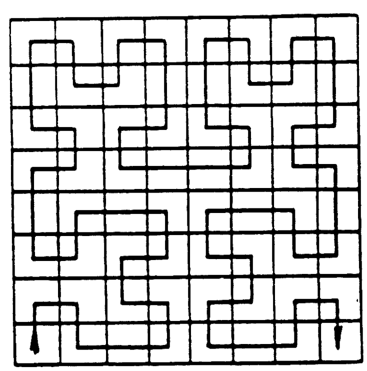
a) ${}^{n}C_i$ et ${}^{n}C_{i+1}$ possèdent un côté commun.

b) si ${}^{n+1}C_{i(k)} \subset {}^{n}C_{j(k)}$, $k = 1,2$ et $j(1) < j(2)$ alors $i(1) < i(2)$

Voici les figures indiquant les trois premières étapes de l'approximation.







Nous définissons maintenant la fonction f comme suit:

$$f : I \quad \rightarrow \quad C$$

$$t = \cap\{ {}^{n}I_{i(n)} \mid i = 1, 2, \ldots \} \quad \mapsto \quad f(t) = \cap\{ {}^{n}C_{i(n)} \mid i = 1,2,\ldots \}$$

où ${}^{n}I_{i(n)}$ est l'intervalle construit à l'étape n et contenant t.

Les intervalles et les carrés construits forment une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers zéro, la propriété de l'intersection finie et les conditions a) et b) permettent de conclure que f est bien définie et est continue car si $| t - t_0 | < 1/4^n$, de par la construction, on a $| f(t) - f(t_0) | < 5/4^n$. □□

Avant de donner la construction du prochain exemple, introduisons le concept d'une simple chaîne; c'est une faible chaîne satisfaisant à la condition supplémentaire suivante: deux maillons et seulement deux maillons consécutifs sont d'intersection non vide.

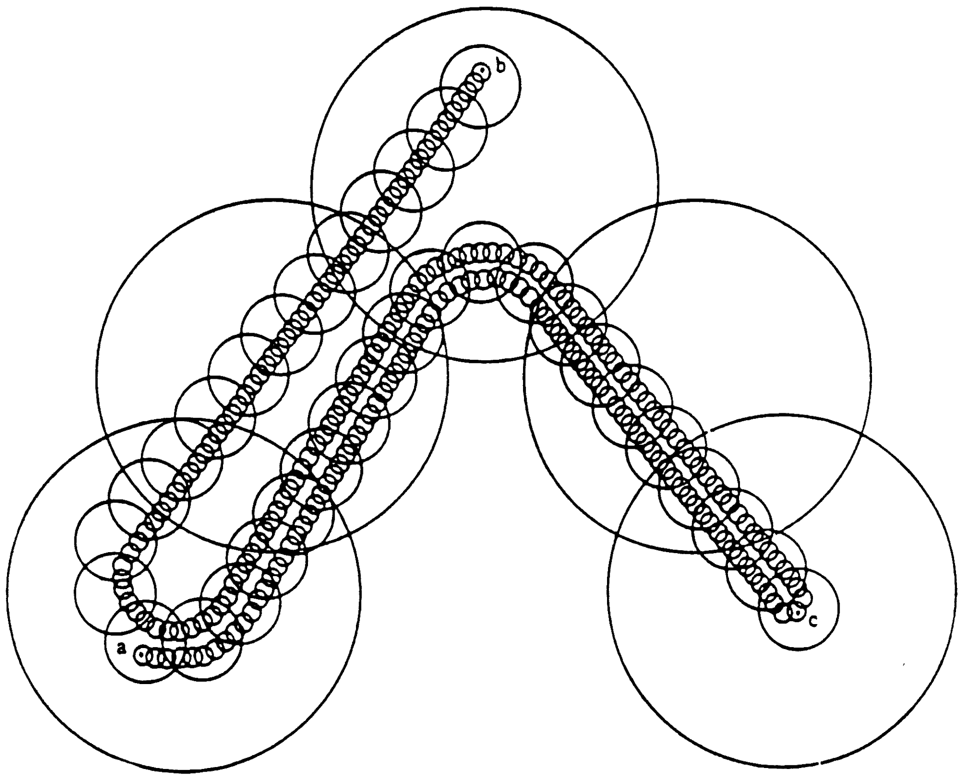
<u>Exemple 1.3.2:</u> Construction d'un continuum indécomposable.

Un continuum est dit décomposable s'il peut s'écrire comme union de deux sous-continua propres, sinon il est dit indécomposable. Il semble naturel, car $[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1]$, de penser que tout continuum est décomposable. Ce qui est faux . Une application du théorème 1.1.2 nous en fournira la preuve.

Supposons que X est le plan IR^2. Maintenant soient a, b, c trois points distincts de X. On construit des simples chaînes $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$, ..., dont les maillons sont des ouverts connexes; les maillons de $\mathfrak{I}_n$ sont de diamètre inférieur à 1/n et tels que si on pose $C_n = \cup \{C \mid C \in \mathfrak{I}_n \}$ on a $\overline{C_n} \subseteq C_{n-1}$, et ayant de plus les propriétés suivantes: $\mathfrak{I}_1$ est une simple chaîne reliant a et c passant par b, $\mathfrak{I}_2$ est une simple chaîne reliant b et c et passant par a, $\mathfrak{I}_3$ est une simple chaîne reliant b et a et passant par c.

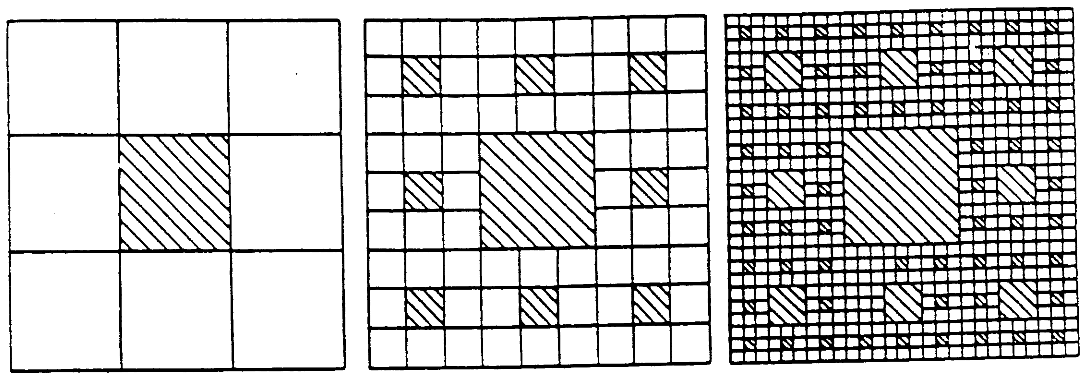
On répète ce procédé et on pose $K = \cap C_n$. Alors K est un continuum d'après la théorème 1.1.2 et qui est indécomposable car aucun des sous-continua de K ne peut contenir deux des trois points a, b, c.

La figure ci-dessous illustre ce procédé.



<u>Exemple 1.3.3:</u> Le tapis de Sierpinski.

On considère le carré $X = [0,1]^2$. On va enlever de X des petits carrés de la façon suivante. On partage le carré X en 9 carrés congrus et on enlève le carré au centre. On continue la procédure sur les huit carrés restants, appelés carrés de premier rang, et on obtient 64 carrés de second rang. En itérant le procédé, à la n-ième étape, nous obtenons 8^n carrés dits du n-ième rang dont les côtés mesurent $(1/3)^n$. L'intersection des ensembles ainsi obtenus est, d'après le théorème 1.1.2 toujours, un continuum indécomposable appelé « LE TAPIS DE SIERPINSKI ».



Les figures ci-dessus indiquent les trois premières étapes du procédé.

Le tapis de Sierpinski est un espace de Peano, donc d'après le théorème de Hahn-Mazurkiewicz , il est l'image continue de [0,1].

Chapitre 2

UNE PROPRIÉTÉ DE L'INDICE DU POINT FIXE PAR LA MÉTHODE DE CONTINUATION.

Le théorème de Brouwer **[6]** dit que toute fonction continue $f : B^n \to B^n$, où B^n désigne la boule unité de IR^{n+1}, possède un point fixe. Ce théorème peut se généraliser à quelques espaces fonctionnels, notamment les espaces vectoriels topologiques localement convexes et cette généralisation possède de nombreuses applications, en particulier dans la théorie des équations différentielles, et notamment aux démonstrations des théorèmes d'existence. En effet, un théorème sur l'existence d'une solution d'une équation différentielle peut être formulé comme un théorème sur l'existence d'un point fixe d'une application d'un espace de fonctions continues dans lui-même (moyennant un certain nombre d'hypothèses adéquates que nous ne formulons pas ici !) . Illustrons ceci par un exemple bien connu.

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \textbf{(1)}$$

où f est une fonction définie sur un domaine D du plan , continue et satisfaisant la condition de Lipschitz par rapport à y, c'est-à-dire qu'il existe une constante k telle que l'inégalité

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq k\,|y_2 - y_1|$$

a lieu pour tout couple de points (x, y_1) et (x, y_2) de D.
Donnons-nous également des valeurs initiales x_0 et y_0 .
Résoudre donc l'équation différentielle **(1)**, signifie trouver une fonction g dérivable au voisinage de x_0 , telle que

$$\frac{dg(x)}{dx} = f(x, g(x)) \text{ et } g(x_0) = y_0,\ \forall\ x \in V, \text{ un voisinage de } x_0.$$

Autrement dit , nous devons trouver une fonction g telle que

$$\mathbf{g\,(x)} = \mathbf{y_0} + \int_{x0}^{x} f(t, g(t))dt,\ \forall x \in V \qquad \textbf{(2)}$$

Désignons par L l'application qui associe à toute fonction « raisonnable » φ la fonction L_φ définie par la condition

$$L_\varphi(x) = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t, \varphi(t))dt,\ \forall x \in V.$$

Le point fixe de cette application est une fonction g telle que

$$L_g = g,\ \text{c'est-à-dire } L_g(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in V$$

ce qui signifie bien que g satisfait à l'égalité (2) .

Il existe au moins deux approches pour étudier l'ensemble des points fixes d'une fonction, la première est par la notion d'indice de point fixe, la deuxième est par la méthode de continuation. Nous allons, pour notre part nous intéresser à la deuxième approche, l'étude de l'existence de continuum dans l'ensemble compact Fix (f) des points fixes d'une fonction continue f. Ce chapitre donc, se résume autour du théorème du continuum.

Nous commençons d'abord par généraliser la proposition 1.1.4 en donnant un critère qui permet de séparer deux composantes connexes de deux sous-ensembles disjoints d'un espace métrique compact; ce résultat nous conduira vers le théorème du continuum. La première section de ce chapitre présentera la version dans le carré $I\times I$ du théorème du continuum; géométriquement il nous dit ceci: K est un compact de $I\times I$ reliant les côtés verticaux du carré $I\times I$ et n'intersectant pas les deux côtés horizontaux du carré $I\times I$, si tout arc reliant les côtés horizontaux de $I\times I$ rencontre K alors le compact K contient un continuum qui relie les deux côtés verticaux.. Nous donnerons un bref rappel sur l'indice de point fixe de Lefschetz dans la deuxième section. Enfin nous généralisons dans la troisième section le théorème du continuum; nous étudierons donc l'existence d'un continuum inclus dans le compact Fix(f) et qui relie les deux bases du cylindre $X\times I$, où $X = IR^n$. Le théorème 1.1.5 nous permettra alors de généraliser encore ce résultat au cas où X est de dimension infinie.

Ce travail est issu d'un résultat de J.-M. BELLEY et G. FOURNIER **[1]**, qui donne aussi une application de cette méthode de continuation pour l'étude de problèmes variationnels.

2.1 <u>UNE PROPRIÉTÉ DES CONTINUA</u>

Rappelons que X désigne un espace métrique dont la distance est définie par d, sauf encore indication contraire; $C_K(x)$ désigne la composante connexe de x dans K où $x\in K$ et K est un sous-ensemble de X.

$E_\varepsilon(x) = \{u \in X \mid \exists\ \varepsilon\text{-chaîne reliant } x \text{ à } u\}$ $(\varepsilon > 0)$.

Enfin rappelons encore ici la notation que nous avons adopté dans le paragraphe 1.1 sur le carré I^2

$I = [0,1]$ et $I^2 = [0,1] \times [0,1]$

${}_tI = \{t\} \times I$ et $I_t = I \times \{t\}$ tels que $t \in I$

Notre première proposition est une extension de la proposition 1.1.4 du chapitre précédent.

Proposition 2.1.1

Soit A un sous-ensemble compact de l'espace métrique X. Soient $x \in A$ et K un sous-ensemble compact de A tel que $C_A(x) \neq C_A(y)$, $\forall y \in K$. Alors il existe U et V deux sous-ensembles ouverts disjoints de X tels que $x \in U$, $K \subset V$ et $A \subset U \cup V$.

Démonstration

Puisqu'aucune composante connexe dans A d'un point y de K ne rencontre aucune composante connexe dans A de x, alors d'après la proposition 1.1.3, il existe $r > 0$ tel que $E_r(x) \cap K = \emptyset$; $E_r(x)$ et $A \cap (X \setminus E_r(x))$ sont des compacts dans A tels que la distance entre eux est strictement supérieure à r. Ainsi en calquant la démonstration de la proposition 1.1.4, il nous suffit de prendre un voisinage ouvert U de rayon r/2 de $E_r(x)$ et le voisinage ouvert $V = B_{r/2}(A \cap X \setminus E_r(x))$ contenant ainsi K et nous obtenons la conclusion demandée. □□

Proposition 2.1.2 **[1]**

Soit B un sous-ensemble compact de X. Soient K et L deux sous-ensembles compacts de B tels que $C_B(x) \neq C_B(y)$, $\forall x \in K$ et $\forall y \in L$. Alors il existe U et V deux sous-ensembles ouverts disjoints de X tels que $K \subset U$, $L \subset V$ et $B \subset U \cup V$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, pour tout $x \in K$, il existe U_x et V_x deux ouverts disjoints de X tels que $x \in U_x$ et $L \subset V_x$ et $B \subset U_x \cup V_x$. Mais $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ et on peut donc extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. D'autre part $L \subset V_{x(k)}$, pour k = 1 ... n, donc $L \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k} = V$.

Alors U et V ainsi construits sont des ouverts disjoints contenant respectivement K et L et recouvrant ainsi B. □ □

Proposition 2.1.3 **[4]**

Soit A une partie fermée de $I^2 = [0,1]^2$ telle que, pout tout $x \in [0,1]$, l'ensemble des ordonnées y des points de A d'abscisses x est un intervalle fermé non vide L_x. Alors le fermé A rencontre la diagonale Δ du carré I^2.

Démonstration

L'hypothèse faite sur A nous permet de retenir que:

(1) Le fermé A rencontre les deux côtés horizontaux du carré I^2 en deux intervalles fermés L_0 et L_1.

(2) A est un continuum.

Vérifions en effet que A est un ensemble connexe. Supposons le contraire; soient donc M et N deux fermés disjoints dans A tels que $A = M \cup N$; soulignons en passant que M et N sont compacts dans IR^2. Considérons la projection canonique $pr : I^2 \to I$, $pr(x,y) = x$; posons $E = pr(M)$ et $F = pr(N)$, alors E et F sont compacts non vides dans I. Puisque $M \cup N = A$, alors on a d'après **(1)**, $E \cup F =$

$pr(A) = I$; mais E et F ne peuvent pas être une disconnexion de I qui est connexe, par conséquent soit $a \in E \cap F$ et considérons L_a. Alors

$$\begin{aligned} L_a &= \{y \in I \mid (a,y) \in A\} \\ &= \{y \in I \mid (a,y) \in M\} \cup \{y \in I \mid (a,y) \in N\} \\ &= ({}_aI \cap M) \cup ({}_aI \cap N), \end{aligned}$$

nous venons ainsi d'obtenir une disconnexion de L_a par deux fermés, ce qui est absurde car L_a est un intervalle fermé. A est donc connexe.

Maintenant on peut supposer que $(0,0) \notin L_0$ et que $(1,1) \notin L_1$, sinon le résultat est déjà démontré. Considérons alors la fonction continue f définie par $f : I^2 \to I$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = x - y$. Puisque A est un continuum d'après **(2),** alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$; d'autre part selon **(1)**, il existe $(0,y_1) \in L_0$ et $(1,y_2) \in L_1$ tels que $y_1, y_2 \in]0,1[$. Or $f(0,y_1)$ est négatif tandis que $f(1,y_2)$ est positif ainsi $f(A)$ contient l'intervalle $[f(0,y_1), f(1,y_2)]$ qui contient 0; il existe alors $(\alpha,\beta) \in A$ tel que $f(\alpha,\beta) = 0$, c'est-à-dire il existe $(\alpha,\alpha) \in A$. □□

Remarque 2.1.1

Cette propositon comprend donc deux volets; le premier nous dit ceci: si A est un fermé (compact) de I^2 disjoint des deux côtés horizontaux de I^2 et tel que tout segment vertical de I^2 dont les extrémités sont situées sur les côtés horizontaux de I^2 l'intersecte en un intervalle fermé, alors A est un continuum. Le théorème du continuum donnera une généralisation de ceci en remplaçant les segments par des arcs mais la conclusion sera que A contient un continuum. Le deuxième volet, l'existence du point fixe, sera généralisé par une application du théorème du continuum dans le troisième paragraphe.

Voici donc le théorème du continuum:

Théorème 2.1.4 (du continuum) [1]

Soit K un sous-ensemble compact de I^2 tel que $K \cap I_0 = \varnothing$ et $K \cap I_1 = \varnothing$. Supposons que

$\forall \alpha : I \to I^2$ continue avec $\alpha(0) \in I_0$ et $\alpha(1) \in I_1$, on a $\alpha(I) \cap K \neq \varnothing$. Alors $\exists C$ un continuum dans K tel que $C \cap {}_0I \neq \varnothing$ et $C \cap {}_1I \neq \varnothing$.

Démonstration

L'hypothèse faite sur K nous assure que K intersecte les deux côtés horizontaux ${}_0I$ et ${}_1I$ de I^2 ; pour cela il suffit de prendre respectivement $\alpha(I) = {}_0I$ et $\alpha(I) = {}_1I$. Supposons maintenant qu'un tel continuum C n'existe pas; alors pour tout $x \in K \cap {}_0I$ et tout $y \in {}_1I$ on a $C_K(x) \neq C_K(y)$, et ainsi d'après la proposition 2.1.2, il existe deux ouverts disjoints U et V de I^2 tel que $K \cap {}_0I \subset U$ et $K \cap {}_1I \subset V$ et U et V recouvrent K. On peut supposer d'une part que $U \cup V$ est disjoint des deux côtés horizontaux I_i, pour $i = 0,1$ et d'autre part que $U \cap {}_1I = \varnothing$ et $V \cap {}_0I = \varnothing$. Considérons maintenant la partie compacte $L = I^2 \setminus (U \cup V)$ qui est disjointe de K. Alors L peut être recouverte par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r et de centre $x_j \in L$ et $j = 1, \ldots, m$:

$$L = \bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j)$$

où le rayon r est choisi comme suit: $3r = d(K,L)$; ceci étant dans le but de nous assurer à ce que les parties des boules qui sont dans U ou dans V ne rencontrent pas K. On pose maintenant

$$J = \left\{ j / \exists\, j_0, j_1, \ldots, j_k \text{ avec } j_k = j \text{ et } d(x_{j_p}, x_{j_{p+1}}) \leq 2r \text{ et } B_r(x_{j_0}) \cap I_0 \neq \varnothing \right\}$$

et $A = \bigcup_{j \in J} B_r(x_j)$.

Ainsi deux éléments quelconques de A peuvent être reliés par une 2r-chaîne dans A et d'après la proposition 1.1.1, A est connexe; mais comme A est ouvert dans IR^2, alors A est connexe par arc. De plus $I_0 \subseteq A$. Soulignons aussi que A ne rencontre pas le côté horizontal I_1. En effet, sinon en joignant certains des x_j par des segments de droite, il est facile de construire $\alpha : I \to I^2$ avec $\alpha(0) \in I_0$ et $\alpha(1) \in I_1$ et $\alpha(I) \cap K = \emptyset$, ce qui est une contradiction.

Nous allons étudier maintenant la frontière de A. Cette frontière de A, $\partial(A)$ est constituée d'une partie de la réunion finie des frontières $\partial(B_r(x_j))$ des $B_r(x_j)$. Or on sait que $\partial(A) = \overline{A} \setminus \overset{0}{A}$; alors l'ensemble des frontières des $B_r(x_j)$ est réparti comme suit: celles qui ne sont pas dans la frontière de A sont un nombre fini d' arcs ouverts et celles qui sont dans la frontière de A qui est par conséquent formée d'un nombre fini d'arcs fermés. Ainsi en joignant ces arcs fermés nous obtenons un arc C' inclus dans $I^2 \setminus L = (U \cup V)$ reliant ainsi les deux côtés verticaux de I^2, car $I_0 \subseteq A$ et $A \cap I_1 = \emptyset$. Mais alors C' sera recouvert par les deux ouverts disjoints U et V , ce qui est absurde car C' est connexe. □ □

2.2 <u>RAPPELS SUR L'INDICE DE POINT FIXE</u>

Voici maintenant un bref rappel sur l'indice de point fixe de Lefschetz. Le but de ce mémoire n'étant pas de poursuivre une étude détaillée de la théorie de l'homologie simpliciale, nous reférons le lecteur à **[5]** et **[9]** pour la vérification des propriétés énoncées.

<u>Définition 2.2.1</u>

Un complexe simplicial K est une collection finie d'ensembles finis tels que si s est un ensemble dans K et si t est un sous-ensemble de s, alors t est dans K et appelé une face de s. Si $s \in K$ et s contient p+1 éléments, alors s est appelé un p-simplexe (ou simplexe de dimension p). Les 0-simplexes sont dits les sommets de K.

La plus grande parmi les dimensions des simplexes est appelée dimension du complexe simplicial.

Définition 2.2.2

Soit K un complexe simplicial et $s = \{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ *un p-simplexe de K. Une orientation sur s est un ordre sur les sommets modulo les permutations paires. Un p-simplexe orienté est noté* $<v_0, v_1, \ldots, v_p>$.

Définition 2.2.3

Soit K un complexe simplicial. Un complexe de chaîne $(C(K), \partial)$ *est la donnée:*

(1) *d' une famille* $C(K) = \{C_q(K)\}_{q\in Z}$ *telle que* $C_q(K)$ *est le groupe abélien libre engendré par tous les q-simplexes orientés de K et tels que si* s_1 *et* s_2 *sont deux représentants d'orientation distincte d'un même q-simplexe alors leur somme est nulle.*

(2) *d' une famille d'homomorphismes de groupes* $\partial = \{\partial_q\}_{q\in Z}$, *appelé opérateur de bord, défini par*

$$\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$$

$$<v_0, v_1, \ldots, v_q> \mapsto \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q \rangle$$

où $\langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q \rangle$ *est le (q-1)- simplexe obtenu en enlevant le sommet* v_i.

Remarque 2.2.1

Soit $(C(K),\partial)$ un complexe de chaîne, alors $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, pour chaque q dans Z. Ainsi $\mathrm{Im}\partial_{q+1}$ est un sous-groupe propre de $\mathrm{Ker}\partial_q$, ce qui permet d'introduire la définition suivante

Définition 2.2.4

On appelle groupe d'homologie simpliciale de rang q d'un complexe simplicial K, noté $H_q(K)$, *le quotient de* $\mathrm{Ker}\partial_q$ *par* $\mathrm{Im}\partial_{q+1}$.

Définition 2.2.5

Soient $(C(K),\partial)$ et $(C(L),\delta)$ deux complexes de chaîne. Une transformation de chaîne de $C(K)$ dans $C(L)$ est la donnée, pour tout $q\in Z$, d'un homomorphisme T_q de $C_q(K)$ dans $C_q(L)$ tel que $\delta_q o\, T_q = T_{q-1} o\, \partial_q$, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_q(K) & \xrightarrow{T_q} & C_q(L) \\ \partial_q \downarrow & & \downarrow \delta_q \\ C_{q-1}(K) & \xrightarrow[T_{q-1}]{} & C_{q-1}(L) \end{array}$$

commute.

Remarques 2.2.2

(1) Dans la définition de $C_q(K)$, lorsqu'on prend les coefficients de la combinaison des q-simplexes dans un corps, IQ par exemple, alors cela munit $C_q(K)$ d'une structure de IQ-espace vectoriel et il en est de même pour $H_q(K)$.

(2) La transformation de chaîne T de la définition 2.2.5 , induit d'une façon naturelle une famille d' applications linéaires $T_* = \{T_{*q}: H_q(K) \to H_q(L)\}_{q\in Z}$.

La propriété suivante est très importante, elle nous procure le lien entre les traces $Tr(T_q)$ et $Tr(T_{*q})$.

Théorème 2.2.1(de Hopf)[7]

Soit K un complexe simplicial de dimension n. Soit

$T_q : C_q(K) \to C_q(K)$, $q\in Z$,

une transformation de chaîne. Alors on a

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\,Tr(T_q) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\,Tr(T_{*q})$$

Définition 2.2.5

Soit K un complexe simplicial de dimension n et soit

$$T_q: C_q(K) \rightarrow C_q(K),\ q \in Z,$$

une transformation de chaîne. On définit le nombre de Lefschetz de T, noté $\lambda(T)$, par

$$\lambda(T) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q Tr(T_q)$$

Remarques 2.2.3

(1) Maintenant, soit f une application continue d'un espace topologique X dans X; nous allons étendre cette définition du nombre de Lefschetz d'une transformation de chaîne à la fonction continue f. Voici en quelques mots la technique de l'homologie simpliciale là-dessus. On approxime l'espace X par un complexe simplicial K (on dit alors qu'on triangularise X), et de f on passe à une application φ de K dans K dite simpliciale (approximation simpliciale de f) et qui à son tour induit une transformation de chaîne $C(\varphi)$ de C(K) dans C(K); alors le nombre de Lefschetz de $C(\varphi)$ est appelé indice de Lefschetz de f, $\lambda(f)$. On admet que $\lambda(f)$ est indépendant du choix de l'approximation simpliciale φ. Il nous faut donc définir d'abord une application simpliciale et son nombre de Lefschetz.

(2) Soit K un complexe simplicial et $v_1, \ldots, v_n$ des sommets. On note $|K|$ l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ (r_i des réels) satisfaisant les conditions suivantes:

(a) $r_i \geq 0$, pour $i = 1, \ldots, n$

(b) $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$

(c) $\{ v_i \mid r_i \neq 0\}$ est un simplexe de K.

Soient $x = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} r'_i v_i$ deux éléments de $|K|$, alors on pose

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (r_i - r'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.2.2

L'ensemble $|K|$ muni de d défini ci-dessus est un espace métrique compact.

Définition 2.2.6

L'espace métrique compact $|K|$ est appelé réalisation géométrique du complexe simplicial K. Si s est un simplexe de K, alors l'ensemble de tous les points $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ dans $|K|$ tel que $\{ v_i / r_i \neq 0 \} = s$ forme un sous-espace appelé réalisation géométrique de s et noté $|s|$.

Définition 2.2.7

Un espace topologique X est dit un polyèdre s'il existe un complexe simplicial K tel que $|K|$ est homéomorphe à X; si τ est un homéomorphisme de $|K|$ dans X, alors le couple (K, τ) est une triangulation du polyèdre X; Le polyèdre X dont (K, τ) en est une triangulation est appelé espace triangulé et on le note (X, K, τ).

Remarque 2.2.4

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors U peut être triangulé.

Définition 2.2.8

Soient K et L deux complexes simpliciaux. Une fonction φ: $K \rightarrow L$, est dite une application simpliciale si

$\varphi(\{ v_0, \ldots, v_n\}) = \{ \varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n)\}$, *pour tout simplexe* $\{v_0, \ldots, v_n\} \in K$.

Remarques 2.2.5

(1) Soit K et L deux complexes simpliciaux et φ: K $\rightarrow$ L une application simpliciale . Alors φ induit une transformation de chaîne $C(\varphi) : C(K) \rightarrow C(L)$ de la manière suivante

$$C_q(\varphi)(< v_0, \ldots , v_q>) = < \varphi(v_0), \ldots , \varphi(v_q)>, \forall q\in Z.$$

Cette même transformation de chaîne $C(\varphi)$ induit selon la remarque 2.2.2 (2) la famille d'applications linéaires $(C(\varphi))_* = \{ (C(\varphi))_{*q} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)\}$.

(2) Considérons toujours φ: K$\rightarrow$ L une application simpliciale; elle induit une nouvelle application $|\varphi|: |K| \rightarrow |L|$, application définie pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \in |K|, \text{ par } |\varphi|(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(v_i).$$

Définition 2.2.9

Soient K et K' deux complexes simpliciaux. On dit que K' est une subdivision de K lorsque:

(1) K et K' ont la même réalisation géométrique.

(2) Tout simplexe de K' est contenu dans un simplexe de K.

Remarque 2.2.6

Soit σ un simplexe, et bar(σ) son barycentre. Si K est un complexe simplicial, alors on définit la subdivision barycentrique de K comme étant le complexe simplicial SdK tels que ses sommets sont les bar(σ) où $\sigma\in$ K et comme simplexes $<$ bar(σ_0), bar(σ_1),..., bar(σ_n)$>$ où les σ_i sont des simplexes de K tels que pour chaque i, σ_i est une face de σ_{i+1}. SdK est appelé la première subdivision barycentrique de K; on peut donc reprendre la même opération sur SdK pour obtenir cette fois, Sd^2K la deuxième subdivision barycentrique de K, et ainsi de suite jusqu'à Sd^nK.

Définition 2.2.10

Soit K un complexe simplicial et soit v un sommet de K. On appelle star de v et on le note Star(v), l'ensemble $K \setminus \cup\{\sigma \,/\, \sigma \text{ est un simplexe, } v \notin \sigma\}$.

Définition 2.2.11

Soit (X,K,τ) *et* (Y,L,τ') *deux espaces triangulés et* $f:X \to Y$ *une fonction continue. Une application simpliciale* $\varphi : K \to L$, *est dite une approximation simpliciale de f si pour tout sommet v de K on a*

$$f(Star(v)) \subset Star(\varphi(v)).$$

Proposition 2.2.3

Soit $f:|K| \to |L|$ *une fonction continue. Pour tout entier positif n, il existe une approximation simpliciale* $\varphi : Sd^n(K) \to L$ *de f.*

Remarques 2.2.7

Soit ζ une transformation de chaîne définie comme suit:

$$\zeta_q : C_q(K) \to C_q(SdK)$$

telle que pour tout sommet v de K, on pose $\zeta_0(v) = v$; et on étend par linéarité ζ_0: $C_0(K) \to C_0(SdK)$; et on définit par récurrence $\zeta_i : C_i(K) \to C_i(SdK)$, $\zeta_i(|\sigma^*|)$ est la somme de tous les simplexes de SdK ayant la même orientation que σ et où $|\sigma^*|$ désigne la réalisation géométrique de σ sans compter la réalisation géométrique de toutes les faces propres de σ. Cette transformation de chaîne est appelée <u>transformation de subdivision</u> de K.

Soit maintenant (X, K, τ) un espace triangulé où dim(K) = n et soit f: X $\to$ X une fonction continue et $f_r : H_r(X) \to H_r(X)$. Alors $H_r(X) = 0$ pour tout r plus grand que n. Si SdK est une subdivision de K et φ est une approximation simpliciale de $\tau^{-1} f \tau$ et $\zeta_q : C_q(K) \to Cq(SdK)$, $q \in Z$, une transformation de subdivision, d'après le théorème de Hopf, on sait que:

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \mathrm{Tr}(f_r) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \mathrm{Tr}(C_r(\varphi)\zeta_r))$$

on pose alors la définition qui suit

<u>Définition 2.2.12</u>

On appelle nombre de Lefschetz de f dans X, le nombre noté $\lambda(f)$, et définit par

$$\lambda(f) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q Tr(C_q(\varphi) \circ \zeta_q)$$

<u>Théorème 2.2.4</u>

Le nombre de Lefschetz de f est un entier.

2.3 <u>UNE PROPRIÉTÉ DE L'INDICE DU POINT FIXE</u>

Ce dernier paragraphe sera consacré à l'étude des continua contenus dans le compact Fix(f). Voici comment nous allons caractériser Fix(f): si l'indice de f est non nul, alors le sous ensemble compact Fix(f) contient un continuum C. Ce résultat sera étendu dans le cas d'espaces euclidiens de dimension infinie.

Nous allons commencer par rappeler à titre de remarque les différentes propriétés de l'indice de point fixe.

<u>Définition 2.3.1</u>

Soit $f : U$ ouvert $\subset IR^n \to IR^n$ une fonction continue et soit Fix(f) = { $x \in U$ / f(x) =

x}, l'ensemble des points fixes de f. On dit que f est une fonction continue admissible lorsque Fix(f) est un sous-ensemble compact de U.

<u>Remarque 2.3.1</u> [5]

Désignons par $C(U, IR^n)$ l'ensemble des fonctions continues admissibles de U dans IR^n. Alors on rappelle qu'un indice sur $C(U, IR^n)$ est une application de $C(U, R^n) \rightarrow IZ$ qui à toute f de $C(U, IR^n)$ associe $ind(f, U, IR^n)$ dans IZ, l'indice de f sur U dans IR^n qui vérifie les cinq propriétés suivantes:

(1) [propriété du point fixe]

Si $ind(f, U, IR^n) \neq 0$ alors $Fix(f) \neq \emptyset$.

(2) [propriété d'excision]

Si Fix(f) est contenu dans un sous-ensemble ouvert V contenu dans U alors $ind (f, U, IR^n) = ind (f , V, IR^n)$.

(3) [propriété d'additivité]

Si V et W sont des sous-ensembles ouverts contenus dans U tels que $Fix(f) \subset V \cup W$ et $Fix(f) \cap V \cap W = \emptyset$, alors $ind(f, U, IR^n) = ind(f, V, IR^n) + ind(f, W, IR^n)$.

(4) [propriété de l'homotopie]

Soit $h : U\times I \rightarrow IR^n$ une homotopie continue et admissible c'est-à-dire $Fix(h) = \{(x,t) \in U\times I \mid h(x,t) = x \}$ est un sous-ensemble compact de $U\times I$, alors $ind(h_0, U, IR^n) = ind(h_1, U, IR^n)$, où $h_t(x) = h(x,t)$.

(5) [propriété de normalisation]

Si f est une fonction constante sur U alors $ind(f, U, IR^n) = 1$

<u>Théorème 2.3.1</u>

Pour tout $f \in C(U,IR^n)$, le nombre de Lefschetz de f, $\lambda(f)$ est un indice.

Lemme 2.3.1

Soit $V \subset IR^n \times I$ et soit $h : V \rightarrow IR^n$ une homotopie continue et admissible. Alors il existe m et W_j, pour $j = 0, \ldots, m-1$, des sous-ensembles ouverts de IR^n tels que $Fix(h) \cap (IR^n \times [j/m, (j+1)/m]) \subset W_j \times [j/m, (j+1)/m] \subset V$.

Démonstration

Soit $(x,t) \in Fix(h)$; nous allons utiliser le fait Fix(h) est un compact, produit de deux compacts respectivement de IR^n et de I. Soit donc $V_{x,t}$ un sous-ensemble ouvert de IR^n contenant x et $J_{x,t}$ un sous-ensemble ouvert de I contenant t, ainsi $(x,t) \in V_{x,t} \times J_{x,t} \subset V$. Soit $t \in I$ fixé et posons h_t la restriction de h sur la section de niveau t du cylindre V; mais $Fix(h_t)$ est la première projection de $Fix(h) \cap (IR^n \times \{t\})$, par conséquent $Fix(h_t)$ est aussi un compact dans IR^n. Alors la famille des $V_{x,t}$, (x,t) parcourant Fix(h), recouvre $Fix(h_t)$, et il existe un entier k tel que $Fix(h_t) \subset V_{x(1),\ t(1)} \cup \ldots \cup V_{x(k),t(k)} = V_t$. Posons d'autre part $J_t = \bigcap_{j=1}^{k} J_{x(j),t(j)}$.

Alors $Fix(h_t) \times \{t\} \subset V_t \times J_t \subset V$. Considérons maintenant le sous-ensemble compact $Fix(h) \setminus (V_t \times J_t) \subset V$; la projection canonique sur I de $Fix(h) \setminus (V_t \times I_t)$ est un compact qui ne contient pas t, par conséquent ne peut donc pas contenir un intervalle ouvert I_t de J_t. Nous avons alors $Fix(h) \cap IR^n \times I_t \subset V_t \times I_t \subset V$. La famille I_t recouvre aussi I, soit donc $\delta > 0$ le nombre de Lebesgue de ce recouvrement. Prenons m tel que $1/m < \delta$. Alors tout intervalle $[j/m, (j+1)/m]$ est contenu dans un certain I_t. Ainsi donc

$$Fix(h) \cap (IR^n \times [j/m, (j+1)/m]) \subset W_j \times [j/m, (j+1)/m],$$

Wj désignant V_t où $t \in [j/m, (j+1)/m]$. □□

Proposition 2.3.2

Sous les hypothèses du lemme 2.3.1, $ind(h_0, V_0, IR^n) = ind(h_1, V_1, IR^n)$, où $V_t = \{x \in IR^n / (x,t) \in V\}$.

Démonstration

Soit m et W_j comme dans la conclusion du lemme 2.3.1. Alors d'après la remarque 2.3.1, la propriété de l'homotopie, on a $ind(h_{j/m}, W_j, IR^n) = ind(h_{(j+1)/m}, W_j, IR^n)$ et d'après cette même remarque 2.3.1 , la propriété de l'excision, on a $ind(h_0, V_0, IR^n) = ind(h_0, W_0, IR^n)$ et $ind(h_{(j+1)/m}, W_j, IR^n) = ind(h_{(j+1)/m}, V_{(j+1)/m}, IR^n) = ind(h_{(j+1)/m}, W_{j+1}, IR^n)$ et enfin $ind(h_1, V_{(m-1)/m}, IR^n) = ind(h_1, V_1, IR^n)$. En posant donc bout à bout les égalités issues de ces propriétés (d'homotopie et d'excision) on obtient l'égalité $ind(h_0, V_0, IR^n) = ind(h_1, V_1, IR^n)$. □□

À la liste des propriétés de l'indice de points fixes énoncées ci-dessus, vient s'ajouter une propriété dite du continuum, généralisant ainsi le théorème de **F.E. Browder [2].**

Proposition 2.3.3(du continuum)

Soit $V \subset IR^n \times I$ et h une homotopie continue admissible telle que $ind(h_0, V_0, IR^n) \neq 0$. Alors il existe un continuum C inclus dans Fix(h) intersectant V_0 et V_1.

Démonstration

Supposons le contraire. Alors aucune composante connexe du compact $Fix(h) \cap (V_0 \times \{0\}) = Fix(h_0)$ ne rencontre le sous-ensemble compact $Fix(h) \cap (V_1 \times \{1\}) = Fix(h_1)$. D'après la proposition 2.1.2 il existe deux ouverts disjoints A et B contenant respectivement $Fix(h_0)$ et $Fix(h_1)$ et $Fix(h) \subset A \cup B$. Or $Fix(h) \setminus B = Fix(h) \cap A$ est un sous-ensemble compact de A, par conséquent la restriction de h à A est encore une homotopie continue admissible et donc, d'après la proposition précédente, on a $ind(h_0, A_0, IR^n) = ind(h_1, A_1, IR^n)$. Puisque $Fix(h_1) \subset B$ et que $Fix(h_1) \cap A = \varnothing$ alors d'après la propriété de point fixe $ind(h_1, A_1, IR^n) = 0$. D'autre part, comme A_0 est un sous-ensemble de V_0, alors la propriété d'excision nous assure que $ind(h_0, A_0, IR^n) = ind(h_0, V_0, IR^n)$. Mais alors $ind(h_0, V_0, IR^n) = 0$, ce qui contredit l' hypothèse. □□

Nous allons étendre ces résultats dans le cas d' espaces de dimension infinie. Soit X un espace de Banach et U un sous ensemble ouvert de X. Nous allons devoir répondre à une question importante, à savoir si f est une fonction continue admissible de U dans X alors les propriétés reliant ind(f, U, X) et Fix(f) seront-elles encore maintenues? La réponse est affirmative dans certains cas et pour parvenir à notre conclusion, étant donné que l'espace X est de dimension infinie voici la technique que nous allons adopter pour remédier à cela. On notera $\{X_n\}_{n\in IN}$ une famille de sous-espaces de dimension finie de X telle que $X_n \subset X_{n+1}$ et $\bigcup_{n\in IN} X_n$ est dense dans X. On approchera en fait X par des sous-espaces de dimension finie.

D'autre part on décomposera Fix(f) en une suite de compacts $Fix(f_n)$ où f_n: $U\cap X_n = U_n \rightarrow X_n$ sont telles que les f_n sont admissibles, ou encore que $Fix(f_n)$ est un sous-ensemble compact à partir d'un certain rang n , et donc $ind(f_n, U_n, X_n)$ est un entier. Ainsi au travers de X_n et de f_n, notre situation est ramenée au cas où l'espace est de dimension finie et où la fonction est admissible; alors le résultat attendu s'obtiendra par passage à la limite.

Enfin en dernière partie, nous donnerons une formulation de ce résultat dans le cas des homotopies.

Voici tout d'abord la définition de la suite f_n dont il est question ici, elle généralise celle donnée par **W.V. Petryshyn [14]** et **F.E. Browder [3]**.

Définition 2.3.2

Soit f: $U \rightarrow X$ une fonction continue et admissible. Soit f_n: $U\cap X_n \rightarrow X_n$, $n \in IN$ une suite de fonctions continues. On dit que $\{f_n\}_{n\in IN}$ est un schéma admissible pour f si pour toute suite $\{x_n\}_{\in IN}$ telle $x_n \in Fix(f_{n(k)})$ et $k(n) \rightarrow \infty$, il existe $x \in Fix(f)$ et une sous-suite d'indices $n(j)$ tels que $x_{n(j)} \rightarrow x$.

Lemme 2.3.2

Soit f: $U \to X$ une fonction continue admissible et soit $\{f_n\}_{n \in IN}$ un schéma admissible pour f. Alors il existe un entier N tel que l'indice de points fixes de f_n sur U_n, noté $ind(f_n, U_n, X_n)$, est un entier pour $n \geq N$.

Démonstration

Nous allons donc montrer que pour n assez grand, f_n est admissible c'est-à-dire que $Fix(f_n)$ est un compact. Soit donc V un sous-ensemble ouvert borné de U tel que $Fix(f) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Prouvons d'abord qu'il existe n_0 tel que $n > n$ entraine que $Fix(f_n) \subset V$: si tel n'est pas le cas alors, il existe $k_n \to \infty$ tel que $x_n \in Fix(f_{k(n)}) \setminus V$; or $\{f_n\}$ est un schéma admissible pour f, alors il existe une sous-suite $x_{n(j)} \to x$ pour un $x \in Fix(f) \subset V$, mais alors $x_{n(j)} \in V$ pour j assez grand, ce qui est contradictoire.

Ainsi donc, si $n > n_0$, $Fix(f_n) \subset \overline{V} \subset U$ et $Fix(f_n)$ est fermé dans $\overline{V}$, donc dans X. Mais alors $Fix(f_n)$ est fermé dans le compact $X_n \cap \overline{V}$, d'où $Fix(f_n)$ est un compact dans U_n. C'est-à-dire que les f_n sont des fonctions continues admissibles pour n assez grand. □□

Nous venons d'établir qu'à partir d'un cetrain rang les termes d'un schéma admissible sont admissibles, c'est-à-dire $Fix(f_n)$ est un compact. La proposition suivante nous donne, selon la définition des f_n un résultat sur $Fix(f)$.

Proposition 2.3.4

Soit f_n un schéma admissible pour f. Si $ind(f_n, U_n, X_n) \neq 0$ pour un nombre infini d'indices n, alors $Fix(f) \neq \varnothing$.

Démonstration

Puisque $ind(f_n, U_n, X_n) \neq \mathbf{0}$, alors il existe $y_n \in Fix(f_n)$, et donc il existe n_k tel que

$y_{n(k)}$ converge vers y; $y \in Fix(f)$. □□

Nous allons maintenant donner une formulation de notre problème dans le langage des homotopies. Tous les résultats qui suivent découlent du lemme 2.3.2. Soit V un sous-ensemble ouvert de $X \times I$ et soit h une homotopie continue admissible de V dans X. Posons h_n: $V_n \to X_n$ une suite d'homotopies continues où $V_n = V \cap (X_n \times I)$. On dit que $\{h_n\}_{n \in IN}$ est un schéma admissible d'homotopie pour h si pour toute suite $\{(x_n, t_n)\}_{n \in IN}$ où $(x_n, t_n) \in Fix(h_{n(k)})$ et $k_n \to \infty$, il existe $(x,t) \in Fix(h)$ et une sous-suite d'indices n_j telle que $(x_{n(j)}, t_{n(j)}) \to (x,t)$. Alors pour chaque t dans I, si on désigne par $h_{n,t}$ la fonction définie par $h_{n,t}(x) = h_n(x,t)$ où x est dans $(V_n)_t$, la section de niveau t du cylindre $V \cap (X_n \times I)$, alors $ind(h_{n,t}, V_{n,t}, X_n)$ est un entier, pour n assez grand. La preuve de ce fait est identique à celle du lemme 2.3.2. Voici donc une généralisation de la proposition 2.3.3.

Proposition 2.3.5(continuum)

Soit V un ouvert $X \times I$ où X est un espace de Banach. Soit h: $V \to X$, une homotopie continue admissible. Soit $h_n: V_n \to X_n$ un schéma admissible pour h. Si on suppose que $ind(h_{n,0}, V_{n,0}, X_n) \neq 0$ pour un nombre infini d'indices n, alors il existe un continuum C inclus dans Fix(h) et intersectant V_0 et V_1.

Démonstration

Sans perte de généralité on peut supposer que $ind(h_{n,0}, V_{n,0}, X_n) \neq 0$ pour tout n.

D'après la proposition 2.3.3, en dimension finie, il existe un continuum C_n contenu dans $Fix(h_n)$ intersectant $V_{n,0}$ et $V_{n,1}$. Soit donc $(x_n,0) \in V_{n.0} \cap C_n$, et comme $(x_n,0) \in Fix(h_n)$ alors quitte à éliminer des Xn, il existe $(x,0) \in Fix(h)$ tel que $(x_n,0) \to (x,0)$.

De même soit $(x_n,1) \in V_{n,1} \cap C_n$ et $(x_n,1) \in Fix(h_n)$; alors il existe $(x,1) \in Fix(h)$ tel que $(x_n,1) \to (x,1)$.

Posons donc $K = Fix(h) \cap (\bigcup_{n \geq N} Fix(h_n))$, N est tel que à partir de ce rang les h_n sont admissibles; l'ensemble K est donc un compact. L'ensemble des points limites des suites des points de K forme alors, d'après le **théorème 1.1.5**, un continuum reliant donc (x,0) et (x,1). □□

Remarque 2.3.2

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, notre étude est axée sur l'ensemble Fix(f). Ainsi si K est un compact d'un espace de Banach X, si V est un ouvert de X contenant K, et si les X_n sont des sous-espaces vectoriels emboîtés de dimension finie de X et dont la réunion est dense dans X, nous dirons que f_n: $V_n = X_n \cap V \rightarrow X_n$, des fonctions continues admissibles, est un schéma admissible pour K, si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in N}$ telle que $x_n \in Fix(f_{k(n)})$ et $k_n \rightarrow \infty$, il existe $x \in K$ et sous-suite d'indices n_j telle que $x_{n(j)} \rightarrow x$. On obtient donc comme conséquences des résultats précédents les résultats suivants:

(1) Soit f_n un schéma admissible pour K. Si pour un nombre infini d'indices n, $ind(f_n, V_n, X_n) \neq \mathbf{0}$, alors $K \neq \varnothing$.

(2) Soit $f_n : V_n \rightarrow X_n$ un schéma admissible d'homotopies continues pour $K \subseteq X \times I$ et V un ouvert de $X \times I$. On suppose que $ind(h_{n,0}, V_{n,0}, X_n) \neq \mathbf{0}$, pour un nombre infini d'indices n, alors il existe un continuum C contenu dans K et intersectant V_0 et V_1.

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce mémoire, la méthode de continuation. À cette fin, nous avons abordé une étude détaillée des continua et en particulier dans les espaces métriques compacts. Nous avons établi une propriété des continua dans un compact. Nous avons ensuite terminé par un théorème du continuum; ce théorème est énoncé dans le cas du carré I^2, ensuite appliqué au cas du cylindre $X \times I$ (étude de l'ensemble des points fixes d'une homotopie continue) et enfin nous avons généralisé ce dernier résultat dans le cas où X est de dimension infinie, une démarche qui fait appel à la première propriété du continuum dans un compact.

L'étude de point fixe permet entre autre d'obtenir l'existence d'une solution d'une équation différentielle. Il aurait donc été intéressant d'appliquer le théorème du continuum par exemple à l'étude d'un problème variationnel. Nous indiquons que ce travail a été fait par J.-M. BELLEY et G. FOURNIER **[1]**, dans le cas d'une équation de mouvement d'un pendule forcé.

Nous espérons que la lecture de ce mémoire est le début d'un continuum dans l'étude de la théorie du continuum...

BIBLIOGRAPHIE

[1] Belley (J.-M.) et Fournier (G.), A continuation method for variational problems and application to the periodically forced pendulum equation with damping.
Université de Sherbrooke, Département de mathématique et d'informatique, rapport de recherche 150, (1995)

[2] Browder (F.E.), On continuity of fixed points under deformations of continuous mappings, Summa Brasiliensis Mathematicae , 4, 5, (1960), p.183-191 (on pourrait aussi trouver le théorème dans Siam Review , vol. 22, No 1, (January 1980), p. 32)

[3] Browder (F.E.), Approximation solvability of nonlinear functional equations in normed linear spaces, Arch. Rat. Mech. Anal. , 26, (1967), p. 33-41.

[4] Choquet (G.), Cours d'analyse, Topologie, t. 2 , (Masson et Cie, 1964)

[5] Dold (A.), Algebraic Topology, (Springer-Verlag, Heidelberg, 1972)

[6] Godbillon (C.), Éléments de topologie algébrique, (Hermann, Paris,1971)

[7] Hocking (J. G.) et Young (G. S.), Topology, (Dover Publication, NewYork, 1988)

[8] Jordan (C.), Cours d'analyse, (Gauthier-Villars, Paris, 1959)

[9] Keesee (J. W.), An introduction to algebraic topology, (Brooks/Cole Publishing Company, California,1970)

[10] Kuratowski (K.), Topologie, t.2, (Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992)

[11] Leray (J.), Theorie des points fixes, Indice total et nombre de Lefschetz, Bull. Soc. Math., 87, (1959), pp. 221-233

[12] Leray (J.) et Schauder (J.), Topologie et équations fonctionnelles, J. Math. Pures et Appl., 9e série, t.24, (1945), p. 201-248

[13] Nadler (S. B. Fr.), Continuum Theory, (Marcel Dekker, New York, 1992)

[14] Petryshyn (W.V.), Remarks on the approximation-solvability of nonlinear functional equations, Arch. Rat. Mech.Anal. , 26, (1967), p.43-49.

[15] Sierpinski (W.) , Introduction to general topology, (University of Toronto Press, Toronto, 1934)

[16] Whyburn (T.G.), Topological analysis, (Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1964).